Radboud Universiteit Nijmegen

Over de stelling van Lebesgue

Differentieerbaarheid van monotone functies

Auteur:
André Schemaitat
s4125495

Supervisor:
A. C. M. van Rooij

2 november 2015

Inhoudsopgave

1 Voorwoord

Zoals de titel van deze scriptie al aanduidt, zullen we differentieerbaarheid van monotone functies bestuderen. Het blijk zo dat zijn dat zulke functies bijna overal differentieerbaar zijn. Dit resultaat wordt ook de stelling van Lebesgue genoemd. De eerste bewijzen voor de stelling zijn vrij ingewikkeld en sommige werken alleen onder aanname van continuïteit. Om die reden hebben een aantal wiskundigen geprobeerd steeds makkelijkere bewijzen te vinden, ook zonder aanname van continuïteit. Het eerste bewijs voor continue functies heeft Lebesgue zelf in 1904 in zijn dissertatie gegeven en ook tegenwoordig verschijnen nog enkele artikelen over dit onderwerp.

In deze scriptie zal ik proberen enkele van deze bewijzen met elkaar te vergelijken en een duidelijk overzicht te geven, in hoe verre sommige van hun met elkaar in verband staan of ook niet. We zullen hiervoor de stelling van Lebesgue tot twee eenvoudigere problemen reduceren en bekijken welke methodes er zijn om deze problemen aan te pakken. We doen dit voornamelijk door vrij elementaire methodes die niet al te veel gebruik van integratietheorie maken, waarbij we opmerken dat er ook bewijzen zijn die een intensiever gebruik van deze theorie maken, dan hier in de scriptie voorgesteld. De hulpmiddelen die wij nodig zullen hebben leven in de sfeer van de stelling van Heine en Borel. We zullen dus zien dat een groot deel van de bewijzen erop berust, dat we zekere verzamelingen, waarop f lokale groeieigenschappen heeft, door intervallen kunnen benaderen. Deze benadering berust op zogenaamde overdekkingslemma's. Uiteindelijk zullen we naar een *groeilemma* kijken. Dit lemma geeft een natuurlijk verband tussen de net genoemde lokale groeieigenschappen van monotone functies en hun globaal groeigedrag.

Ter afsluiting kijken we nog naar een belangrijke toepassing van de stelling van Lebesgue, namelijk hoe we een analogon van de hoofdstelling van de calculus voor Riemann-integreerbare functies ook voor Lebesgue-integreerbare functies kunnen formuleren. Zoals je verwacht is dat niet de enige belangrijke toepassing. Bijvoorbeeld zijn kansverdelingen stijgende functies. Zo kan je door differentiatie een verband tussen kansverdelingen en kansdichtheid maken. Ook de theorie van Riemann-Stieltjes-integratie staat hiermee in verband, voornamelijk ook door middel van absoluut continue functies en functies van begrensde variatie.

Ten slotte wil ik me graag bij mijn familie en Leonie, voor haar oneindige geduld met mij, bedanken. Bovendien gaat mijn dank ook aan meneer van Rooij, voor zijn continue ondersteuning, correcties, constructief advies en het feit dat hij mijn enthousiasme voor dit onderwerp heeft gewekt.

2 Voorkennis

Om de scriptie zonder moeite te kunnen lezen is een basiskennis over reële analyse en topologie nodig. Een inleiding in dit vakgebied is in de boeken *Analysis I* en *Analysis II* van Terence Tao te vinden. Een meer historisch georiënteerde aanpak wordt in [3] gegeven. In dit hoofdstuk zal ik een deel van de voor ons belangrijke theorie herhalen. De lezer die met de maattheorie van Lebesgue vertrouwd is kan het eerste hoofdstuk gerust overslaan. Ook in de appendix (sectie 14) worden een aantal feiten uitgelegd, die voor de komende hoofdstukken van belang zijn. Eerst gaan we wat terminologie vast leggen.

2.1 Notaties.

- De voor de hand liggende operaties op verzamelingen A en B noteren wij met

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ en } A\ \Delta B.$$

  Met $A \ \Delta\ B$ bedoelen we het **symmetrisch verschil** van A en B, dus

$$A \ \Delta\ B := (A \setminus B)\ \cup\ (B \setminus A).$$

  Voor verzamelingen A en B spreken we verder af

$$A \subset B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A : a \in B.$$

- Laat A en B verzamelingen zijn. Met B^A noteren wij de verzameling van alle functies $f : A \to B$. Een element f van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ noemen we **rij**. Een meer gebruikelijke notatie voor een rij is $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ofwel (a_n). Een rij (a_n) is de functie $n \mapsto a_n$.

- Als $f : A \to B$ een functie is en $A' \subset A$ dan noteren wij de **restrictie** van f tot A' door $f \upharpoonright A'$. Dat is dus de volgende functie:

$$(f \upharpoonright A')(x) := f(x) \qquad (x \in A').$$

- Met $\underline{n}$ noteren wij de verzameling $\{1, 2, \cdots, n\}$.

- Als a en b reële getallen zijn noteren wij hun **maximum** en **minimum** door

$$a \vee b \qquad \text{resp.} \qquad a \wedge b.$$

- Als $A \subset \mathbb{R}$ samenhangend is en oneindig veel punten bevat noemen we A een **interval**. De lege verzameling $\emptyset$ en eenpuntsverzamelingen sluiten we dus uit. Zie lemma 14.4 voor meer details.

- De **lengte** van een interval I definiëren wij door

$$|I| := \begin{cases} +\infty & \text{als } I \text{ onbegrensd is,} \\ \sup I - \inf I & \text{als } I \text{ begrensd is.} \end{cases}$$

  We spreken bovendien af dat de lengte van de lege verzameling $\emptyset$ gelijk aan 0 is.

- Als $A \subset \mathbb{R}$ geven we de **afsluiting**, het **inwendige**, het **uitwendige** en de **rand** met $\operatorname{clo}(A)$, $\operatorname{int}(A)$, $\operatorname{ext}(A)$ resp. ∂A aan.

- Als I een interval is, dan geven we met $C(I)$ de verzameling der **continue functies** op I aan.

- Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie. Als $c \in (a, b)$ en

$$\lim_{x \to c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x}$$

  bestaat, zeggen we dat f te c **differentieerbaar** is. Als de limiet bestaat of gelijk aan $\pm\infty$ is, definiëren wij

$$f'(c) := \lim_{x \to c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x}.$$

  Dus: f' is een partiële functie met waarden in $[-\infty, +\infty]$. Omdat we in deze scriptie voornamelijk met stijgende functies werken, zullen we alleen het geval $f'(c) \in [0, +\infty]$ tegen komen.

  Merk op: Het differentieerbaar zijn van f te c houdt in dat $f'(c)$ gedefinieerd is en dat $-\infty < f'(c) < \infty$.

2.2. Nu bekijken we de Lebesgue buitenmaat m^* en een aantal elementaire eigenschappen. In verband hiermee zullen we ook de meest belangrijke eigenschappen van meetbare verzamelingen herhalen. Niet essentiële maar eventueel inzichtgevende en interessante feiten zijn in de appendix (sectie 14) te vinden.

2.3 Definitie. Laat $A \subset \mathbb{R}$. Dan definiëren we

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\},$$

waar iedere I_n een open interval of $\emptyset$ is.

2.4. Omdat we $\emptyset$ voor de I_n-en toelaten omvat de definitie ook eindige sommaties. Andersom zijn eindige sommaties alleen niet genoeg voor het begrip van de Lebesgue-buitenmaat. In het algemeen is het infimum over de som der lengtes van aftelbaar veel I_n-en strikt kleiner. Bekijk bijvoorbeeld de rationale getallen $\mathbb{Q}$. Volgens stelling 2.6 geldt $m^*(\mathbb{Q}) = 0$, omdat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is, maar als $\mathbb{Q} \subset I_1 \cup \cdots \cup I_N$ voor zekere open intervallen $I_1, \cdots, I_N$, dan moet minstens een van de I_n-en onbegrensd zijn, zodat de totale lengte van de intervallen gelijk aan $+\infty$ is. Verder hebben we aan aftelbaar veel intervallen genoeg omdat $\mathbb{R}$ als topologische ruimte Lindelöf is, dus iedere willekeurige open overdekking bevat een aftelbare deeloverdekking.

2.5 Definitie. We noemen $N \subset \mathbb{R}$ **verwaarloosbaar**, als $m^*(N) = 0$. Laat $A \subset \mathbb{R}$. Stel P is een eigenschap die voor iedere $x \in A$ wel of niet geldt. Als

$$m^*(\{x \in A : P(x) \text{ is niet waar.}\}) = 0,$$

dan zeggen we dat P **bijna overal** geldt. I.e. P geldt op een verwaarloosbare verzameling na. Meestal is $A = \mathbb{R}$ of A is een interval.

2.6 Stelling. *De functie m^* heeft de volgende eigenschappen:*

(1) *Als $A, B \subset \mathbb{R}$ en $A \subset B$, dan geldt $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

(2) *Als $A_1, A_2, \cdots$ deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn, dan geldt*

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum m^*(A_n).$$

(3) *Stel $U \subset \mathbb{R}$ is open. Schrijf $U = \bigcup I_n$, waar de I_n-en de componenten van U zijn (zie stelling 14.7). Dan geldt $m^*(U) = \sum |I_n|$.*

(4) *$m^*([a, b]) = b - a$ als $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \leq b$.*

(5) *$m^*(t + A) = m^*(A)$ waar $t \in \mathbb{R}$ en $t + A = \{t + a : a \in A\}$.*

(6) *Een aftelbare vereniging van verwaarloosbare verzamelingen is verwaarloosbaar.*

(7) *Eenpuntsverzamelingen zijn verwaarloosbaar.*

(8) *Aftelbare verzamelingen zijn verwaarloosbaar.*

(9) *De lengte $|I|$ van een interval is gelijk aan $m^*(I)$.*

Bewijs. **(1)** Duidelijk.

(2) Laat $A_1, A_2, \cdots$ deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. We kunnen aannemen dat $m^*(A_n) < \infty$ voor iedere n, omdat de claim anders triviaal is. Laat $\epsilon > 0$. Kies voor elke n open intervallen I_{ni} met

$$A_n \subset \bigcup_i I_{ni} \qquad \text{en} \qquad \sum_i |I_{ni}| < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Dan geldt

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,i} I_{ni},$$

zodat

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum_n \sum_i |I_{ni}| < \sum_n \left(m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_n m^*(A_n) + \epsilon.$$

Neem nu de limiet $\epsilon \downarrow 0$.

(3) We hoeven alleen te laten zien dat $\sum |I_n| \leq m^*(U)$. Stel dus $U \subset \bigcup J_n$ waar J_n open intervallen zijn. We moeten bewijzen

$$\sum |I_n| \leq \sum |J_n|.$$

We kunnen weer aannemen dat $|J_n| < \infty$ voor iedere n, omdat we anders meteen klaar zijn. Dat betekent dat iedere J_n een begrensd en open interval is. We kunnen ook aannemen dat $J_n \neq \emptyset$ voor elke n. Dus: Iedere J_n is van de vorm (c, d) voor zekere $c < d$ in $\mathbb{R}$. We zijn klaar als voor iedere $s \in (0, 1)$ en $N \in \mathbb{N}$ het volgende geldt:

$$s \sum_{n=1}^{N} |I_n| \leq \sum |J_n|.$$

Voor $n \in \underline{N}$ laat $[a_n, b_n] \subset I_n$ zodanig zijn dat $b_n - a_n \geq s\,|I_n|$. Dan geldt

$$\bigcup_{n=1}^{N} [a_n, b_n] \subset U \subset \bigcup J_n.$$

Dus, omdat iedere J_n open is, vinden we een getal $p \in \mathbb{N}$ met

$$\bigcup_{n=1}^{N} [a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{p} J_n.$$

Met de disjunctheid van de I_n-en vinden we

$$\begin{aligned}
s \sum_{n=1}^{N} |I_n| \leq \sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n) &= \sum_{n=1}^{N} \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} \\
&= \int \sum \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} = \int \mathbb{1}_{\bigcup_{n \leq N} [a_n, b_n]} \\
&\leq \int \mathbb{1}_{\bigcup_{n \leq p} J_n} \leq \int \sum_{n=1}^{p} \mathbb{1}_{J_n} \\
&= \sum_{n=1}^{p} \int \mathbb{1}_{J_n} = \sum_{n=1}^{p} |J_n| \leq \sum |J_n|.
\end{aligned}$$

Dat bewijst de claim.

(4) Laat $\epsilon > 0$. Dan geldt $[a, b] \subset (a - \epsilon, b + \epsilon)$ zodat $m^*([a, b]) \leq b - a + 2\epsilon$. Neem nu de limiet $\epsilon \downarrow 0$. Verder geldt $(a, b) \subset [a, b]$ zodat met **(1)** en **(3)** volgt dat $b - a = m^*((a, b)) \leq m^*([a, b])$. Dat geeft de gezochte gelijkheid.

(5) De translatieinvariantie volgt met het feit dat $\bigcup I_n \supset A$ dan en slechts dan als $\bigcup (t + I_n) \supset (t + A)$. Verder is $t + I_n$ ook een open interval.

(6) Dat volgt eenvoudig met **(2)**. Als $A_1, A_2, \cdots$ verwaarloosbaar zijn dan geldt

$$0 \leq m^* \left(\bigcup A_n \right) \leq \sum m^*(A_n) = 0.$$

(7) Als $x \in \mathbb{R}$ dan wordt x door $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ overdekt voor elke $\epsilon > 0$.

(8) Volgt met **(6)**.

(9) Voor intervallen (a, b) en $[a, b]$ met $a \leq b$ hebben we dit in **(3)** en **(4)** laten zien. Voor begrensde en half-open intervallen kunnen we gebruiken dat eenpuntsverzamelingen verwaarloosbaar zijn. Voor een niet begrensd interval I moeten we nog laten zien dat $m^*(I) = \infty$. Omdat I samenhangend en niet begrensd is kunnen we een rij I_n van open intervallen vinden met $|I_n| = n$ en $I_n \subset I$. Dat geeft met **(1)**:

$$m^*(I) \geq m^*(I_n) = n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dus $m^*(I) = \infty$.

■

2.7. In verband met de Lebesgue-buitenmaat komen we Borel- en Lebesguemeetbare verzamelingen tegen. Ik zal kort de meest belangrijke eigenschappen van deze verzamelingen herhalen.

2.8 Definitie. Een **σ-algebra** is een collectie deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ welke onder het nemen van complementen en aftelbare doorsnedes gesloten is. Verder moet zo een collectie de lege verzameling bevatten.

Als $A \subset \mathbb{R}$ dan noteren wij met $[A]$ de kleinste (t.o.v. de inclusie $\subset$) σ-algebra die A bevat. We nomen $[A]$ ook **voortgebracht** door A. Er geldt

$$[A] = \bigcap_{\Sigma} \Sigma,$$

waar de doorsnede over alle σ-algebra's Σ genomen wordt met $A \in \Sigma$.

2.9 Definitie. De **Borel** σ-algebra $\mathcal{B}$ definiëren wij door $[\mathcal{O}]$ waar

$$\mathcal{O} := \{O \subset \mathbb{R} : O \text{ is open}\}.$$

Elementen van $[\mathcal{O}]$ noemen we **Borelmeetbaar**.

2.10 Definitie. We noemen een verzameling $E \subset \mathbb{R}$ **Lebesguemeetbaar**, ofwel **meetbaar**, als er voor iedere $\epsilon > 0$ een open verzameling $O \supset E$ bestaat met $m^*(O \setminus E) < \epsilon$. In dat geval schrijven we $m(E) := m^*(E)$.

2.11. Een andere gebruikelijke en equivalente definitie van meetbaarheid is de volgende: $E \subset \mathbb{R}$ heet meetbaar als voor iedere verzameling $A \subset \mathbb{R}$ geldt

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Deze definitie werd oorspronkelijk door Carathéodory ingevoerd.

2.12 Stelling. *De meetbare verzamelingen vormen een σ-algebra. Hierop is m een (niet-eindige) maat. In het bijzonder geldt dus voor onderling disjuncte en meetbare $E_1, E_2, \cdots$ dat*

$$m\left(\bigcup E_n\right) = \sum m(E_n).$$

Verder : Als $E \subset \mathbb{R}$ meetbaar is dan geldt voor elke $\epsilon > 0$:

(1) *Er bestaat een open verzameling O met $E \subset O$ en $m(O \setminus E) \leq \epsilon$.*

(2) *Er bestaat een gesloten verzameling F met $F \subset E$ en $m(E \setminus F) \leq \epsilon$.*

(3) *Als $m(E) < \infty$ dan bestaat er een compacte verzameling K met $K \subset E$ en $m(E \setminus K) \leq \epsilon$.*

2.13. Het verband tussen meetbare verzamelingen en Borelmeetbare verzamelingen is als volgt: Iedere meetbare verzameling E is op een verwaarloosbare verzameling na gelijk aan een G_δ-verzameling, waarbij we een verzameling G_δ noemen als zij een aftelbare doorsnede van open verzamelingen is.

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ zij O_n een open verzameling met $O_n \supset E$ en $m(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Laat $S := \bigcap O_n$. Dan $S \supset E$ en $m(S \setminus E) = 0$. Dus

$$E = S \setminus (S \setminus E),$$

waar S een G_δ is en $S \setminus E$ verwaarloosbaar.

In het bijzonder is E dus het symmetrisch verschil van een G_δ verzameling en een verwaarloosbare, want

$$E = (S \setminus E)\ \Delta\ S.$$

In lemma 14.12 is een voorbeeld van Lebesgue- maar niet Borelmeetbare verzameling te vinden.

3 Historie

De stelling van Lebesgue beweert dat iedere stijgende functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bijna overal differentieerbaar is. Hiermee is bedoeld dat de verzameling

$$[a,b] \setminus \{c \in [a,b] : f'(c) \in [0,\infty)\}$$

verwaarloosbaar is.

In [10] heeft Lebesgue voor het eerst deze stelling voor continue functies bewezen. In 1911 heeft William H. Young de stelling ook voor niet noodzakelijk continue functies bewezen. In de volgende tijd probeerde men steeds makkelijkere bewijzen voor de stelling te vinden. Bijvoorbeeld heeft Riesz in 1955 een nieuw bewijs voor het continue geval gevonden. Daarvoor heeft hij het zogenaamde *lemma van de rijzende zon* (zie 8.4) bedacht. Hoewel Riesz beweert dat het continue geval makkelijk naar het algemene geval uit te breiden is, zullen we zien dat deze overgang niet helemaal moeiteloos verloopt.

Rubel vond de uitbreiding ook niet triviaal en heeft om die reden een eenvoudige methode bedacht om het continue geval, door middel van de continue linksinverse $f^{\leftarrow}$ (zie 5.8), uit te breiden. Dit innovatieve idee gebruikt round 50 jaar later ook Faure in [7] om het idee van Riesz op een uiteraard heldere en elementaire manier uit te breiden.

Andere aanpakken gebruiken eigenschappen van overdekkingen bestaande uit, in zekere zin, kleine intervallen. Een prominent voorbeeld hiervan is het overdekkingslemma van Vitali (zie 8.9). Dit is een heel krachtig hulpmiddel om de stelling van Lebsgue te bewijzen, maar zelf niet zo eenvoudig te bewijzen als het lemma van de rijzende zon. Een standaardbewijs, gebruik makend van deze methode, heeft bijvoorbeeld Saks in [6, p. 114] geformuleerd.

Een andere essentiële observatie zullen we in lemma 12.1 maken. Dit lemma merkt op hoe we lokale groeieigenschappen van stijgende functies kunnen gebruiken om het globale groeigedrag te beschrijven. Dit stelt ons, op een natuurlijke manier, in staat om het bewijs van het algemene geval adhoc te geven. Het groeilemma zelf kan op verschillende manieren worden bewezen. Het lemma van Vitali geeft ook hier een snelle oplossing.

Dit is alleen een klein overzicht van de meest bekende aanpakken. We zullen in het volgende ook nog andere zien.

In grove lijnen zullen wij ons met de volgende aanpakken bezig houden:

(1) Het continue geval.

(2) Het continue geval naar het algemene uitbreiden.

(3) Het algemene geval direct bewijzen.

Omdat dit overzicht veel nieuwe begrippen bevat, is het teruglezen op een later moment misschien een goed idee. We zullen nu eerst een voorbeeld bekijken.

4 Duivelstrap

Nadat we ons met de stelling van Lebesgue en zijn historie hebben bezig gehouden, kunnen we naar meer technische details kijken. Nomen de verzameling der punten waar de monotone functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ niet differentieerbaar is even E. We kunnen ons nu afvragen of we een scherpere uitspraak over E kunnen maken, namelijk: is E misschien aftelbaar ? Dat blijkt in het algemeen niet waar te zijn. We kunnen een stijgende en zelfs continue functie construeren waarvan de afgeleide op een overaftelbare en verwaarloosbare verzameling de waarde $+\infty$ aanneemt.

Een voorbeeld voor zo'n functie is de zo genaamde **Cantorfunctie** of ook **Duivelstrap**. De constructie lijkt pathologisch maar de functie zelf heeft heel bijzondere en inzichtgevende eigenschappen. Voor ons doel is het belangrijk dat de Cantorfunctie stijgend is, maar in alle punten van de **Cantorverzameling** niet differentieerbaar is. We zullen zien dat de Cantorverzameling $\mathbb{D}$ overaftelbaar is, zodat de verzameling E niet aftelbaar hoeft te zijn.

4.1. Wij construeren ten eerste de Cantorverzameling $\mathbb{D}$. We beginnen met het interval $[0, 1]$ en halen in de eerste stap $I_{0,1} := (1/3, 2/3)$ weg. Over blijft $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. In de tweede stap halen we $I_{1,1} := (1/9, 2/9)$ en $I_{1,2} := (7/9, 8/9)$ weg en krijgen

$$[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Op die manier gaan we nu door en houden uiteindelijk

$$\mathbb{D} := [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$$

over. Figuur 1 maakt de eerste vier stappen van deze constructie duidelijk.

We zien nu makkelijk dat $\mathbb{D}$ verwaarloosbaar is. Na de n-de stap houden we namelijk nog 2^n gesloten en disjuncte intervallen ter lengte 3^{-n} over zodat $m^*(\mathbb{D}) \leq (2/3)^n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Nu bekijken we nog een expliciete beschrijving van $\mathbb{D}$.

4.2 Notatie. Omdat we ieder element $x \in [0, 1]$ als $x = \sum x_n 3^{-n}$ kunnen schrijven met $x_n \in \{0, 1, 2\}$ noteren we dat getal x dan ook met

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 \cdots, \text{ of ook } x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)_3.$$

Figuur 1: Constructie van $\mathbb{D}$.

4.3 Lemma. *De Cantorverzameling $\mathbb{D}$ is gegeven door*

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in [0,1] : x = 2\sum x_n 3^{-n} \ , \ (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Verder is er precies één zo'n rij (x_n) die het getal $x \in \mathbb{D}$ representeert.

Bewijs. **Existentie:** We bewijzen eerst

$$x \in \mathbb{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists (x_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} : x = \sum x_n 3^{-n}.$$

($\Rightarrow$) Laat $x \in \mathbb{D}$ en schrijf $x = 0.x_1x_2\cdots$ met $x_i \in \{0,1,2\}$. Dus $x = \sum x_n 3^{-n}$. Als $(x_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ zijn we klaar. Anders zij N de eerste positie waar $x_N = 1$. Dan geldt

$$\sum_{n<N} x_n 3^{-n} + 3^{-N} \leq x \leq \sum_{n<N} 3^{-n} + 2 \cdot 3^{-N}.$$

Dus

$$x \in [0.x_1x_2\cdots x_{N-1}1, 0.x_1x_2\cdots x_{N-1}2].$$

Het inwendige van dit interval is precies een open stuk dat we van $[0,1]$ weghalen om $\mathbb{D}$ te verkrijgen. Dus moet x een randpunt van dit interval zijn. Als x het rechterrandpunt is vervang x_N door 2 en x_n door 0 voor $n > N$. Als x het linkerrandpunt is vervang x_N door 0 en x_n door 2 voor $n > N$. Na deze aanpassing geldt steeds nog dat $x = \sum x_n 3^{-n}$. Nu hebben we de gezochte representatie voor x gevonden.

($\Leftarrow$) Als x zo'n representatie heeft ga je makkelijk na, dat x niet in een component van $[0,1] \setminus \mathbb{D}$ kan zitten. Dus $x \in \mathbb{D}$.

Dat bewijst het eerste deel van ons lemma, namelijk de existentie van de gezochte schrijfwijze.

Uniciteit: We bewijzen nu dat iedere rij $(x_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ precies één element in $\mathbb{D}$ representeert. Stel $x = 2\sum_n \alpha_n 3^{-n} = 2\sum_n \beta_n 3^{-n}$ voor zekere $\alpha_n, \beta_n \in \{0,1\}$. Neem aan dat niet voor iedere n geldt $\alpha_n = \beta_n$. Laat dan

$$N := \min\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq \beta_n\},$$

en laat verder $\gamma_n := \beta_n - \alpha_n$. Dan geldt

$$0 = x - x = 2\sum_n \gamma_n 3^{-n} = \gamma_N 3^{-N} + \sum_{n>N} \gamma_n 3^{-n}. \tag{4.1}$$

Per aanname geldt $\gamma_N \neq 0$ dus $\gamma_N \in \{-1, 1\}$. Stel eerst $\gamma_N = 1$. Met formule (4.1) geldt dan

$$3^{-N} = -\sum_{n>N} \gamma_n 3^{-n}.$$

Dat kan niet, want de rechter som is maximaal gelijk aan $\frac{3^{-N}}{2}$, namelijk als $\gamma_n = -1$ voor $n > N$. Als $\gamma_N = -1$ dan moet in formule (4.1) gelden

$$3^{-N} = \sum_{n>N} \gamma_n 3^{-n}.$$

Dat kan, met hetzelfde argument, ook niet. Dus $\alpha_n = \beta_n$ voor alle n. ■

4.4 Lemma. *Laat $x, y \in \mathbb{D}$ met $x < y$. Schrijf $x = 2\sum x_n 3^{-n}$ en $y = 2\sum y_n 3^{-n}$. Dan bestaat $N = \min\{n : x_n \neq y_n\}$ en er geldt $x_N = 0$ en $y_N = 1$.*

Bewijs. We weten

$$0 < y - x = 2(y_N - x_N)3^{-N} + 2\sum_{n>N}(y_n - x_n)3^{-n}. \tag{4.2}$$

Neem nu even aan dat niet geldt $x_N = 0$ en $y_N = 1$. Met $x_N \neq y_N$ volgt $y_N - x_N = -1$. Met formule (4.2) geldt

$$0 < -2\ 3^{-N} + 3^{-N} = -3^{-N}.$$

Dat is een tegenspraak, zodat $y_N = 1$ en $x_N = 0$. ■

4.5. We construeren nu de Cantorfunctie zoals in figuur 2 te zien. Maak eerst een functie $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ door

$$\psi\left(2\sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n} \qquad ((x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

4.6 Lemma. *ψ is stijgend.*

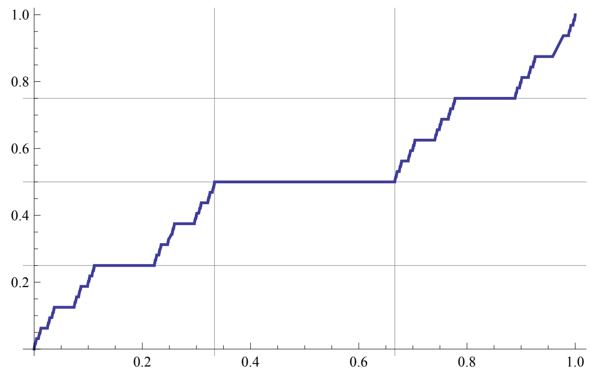
Bewijs. Laat $x < y$ elementen van $\mathbb{D}$ zijn. Schrijf $x = 2\sum x_n 3^{-n}$ en $y = 2\sum y_n 3^{-n}$. Laat $N = \min\{n : x_n \neq y_n\}$. Met lemma 4.4 volgt dat $x_N = 0$ en $y_N = 1$. Nu geldt

$$\begin{aligned}\psi(y) - \psi(x) &= \sum (y_n - x_n)2^{-n} \\ &= (y_N - x_N)2^{-N} + \sum_{n>N}(y_n - x_n)2^{-n} \\ &\geq 2^{-N} - 2^{-N} = 0.\end{aligned}$$

Dus is ψ stijgend. ■

4.7 Definitie. Nu kunnen we de Cantorfunctie ϕ definiëren door

$$\phi(x) := \sup\{\psi(y) : y \in \mathbb{D} \cap [0, x]\} \qquad (x \in [0, 1]).$$



Figuur 2: De Cantor-functie ϕ.

4.8. Met lemma 4.6 zien we dat $\phi \restriction \mathbb{D} = \psi$ en dat ϕ stijgend is.

4.9 Stelling. *ϕ is in de punten van $\mathbb{D}$ niet differentieerbaar.*

Bewijs. Laat $c \in \mathbb{D}$ en schrijf $c = 2\sum c_n 3^{-n}$. Laat $N \in \mathbb{N}$. We maken nu $x = 0.x_1x_2 \cdots \in \mathbb{D}$ als volgt:

$$x_n = \begin{cases} c_n & \text{als } n \neq N, \\ 1 - c_n & \text{als } n = N. \end{cases}$$

Dan geldt

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(c)}{x - c} \right| = \frac{2^{-N}}{2\ 3^{-N}} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^N.$$

We hebben dus het volgende bewezen: Voor iedere $N \in \mathbb{N}$ is er een $x \in \mathbb{D}$ met

$$|c - x| < 2\ 3^{-N} \qquad \text{en} \qquad \left| \frac{\phi(x) - \phi(c)}{x - c} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^N.$$

We kunnen dus een rij punten (t_n) in $\mathbb{D}$ vinden zodat

$$t_n \to c \qquad \text{en} \qquad \left| \frac{\phi(t_n) - \phi(c)}{t_n - c} \right| \to \infty.$$

De afgeleide in het punt c kan dus niet eindig zijn. ∎

4.10. Ons doel is nu bereikt. De lezer die nog meer over deze functie wil weten zal in [5, p.99 - 100 en p. 50] meer informatie vinden. We kunnen nog een stap verder gaan. De Duivelstrap is een speciaal voorbeeld om te laten zien dat er een monotone functie is die in overaftelbaar veel punten niet differentieerbaar is. We zullen in het volgende laten zien dat we zelfs voor iedere verwaarloosbare verzameling E een stijgende en continue functie kunnen maken zodat deze in de punten van E niet differentieerbaar is. Eerst nog wat notatie:

4.11 Definitie. Stel $\mathcal{I} = (I_1, I_2, I_3, \cdots)$ waar iedere I_n een open interval of de lege verzameling is. Dan definiëren wij

$$|\mathcal{I}| := \sum |I_n| \qquad \text{en} \qquad \bigcup \mathcal{I} := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Merk op dat de intervallen niet disjunct hoeven te zijn. Onze definitie van de Lebesgue-buitenmaat wordt dan

$$m^*(E) = \inf \left\{ |\mathcal{I}| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\},$$

waarbij $\mathcal{I}$ zoals hierboven is.

4.12 Stelling. *Stel $E \subset \mathbb{R}$ is verwaarloosbaar. Dan is er een stijgende en continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat f in de punten van E niet differentieerbaar is.*

Bewijs. Kies voor elke $n \in \mathbb{N}$ een rij $\mathcal{I}_n$ van open intervallen zodat

$$E \subset \bigcup \mathcal{I}_n \qquad \text{en} \qquad |\mathcal{I}_n| < 2^{-n}.$$

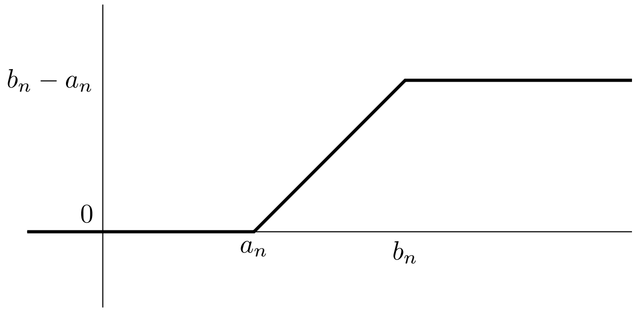
Laat $\mathcal{I}$ de vereniging van alle intervallen in $I_1, I_2, \cdots$ zijn. Dan is $\mathcal{I}$ een aftelbare collectie van open intervallen. Schrijf dus $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \cdots\}$. We nemen aan $I_k \neq \emptyset$ voor iedere k. Stel $I_k = (a_k, b_k)$. Voor iedere k maken we dan een functie $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zie figuur 3) door

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < a_k, \\ x - a_k & \text{als } a_k \le x \le b_k, \\ b_k - a_k & \text{als } x > b_k. \end{cases}$$

Merk op dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en $N \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \le \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) \le \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \le 1.$$

We kunnen dus de volgende functie definiëren: $f = \sum f_k$. Je ziet ook meteen dat de som uniform convergeert, zodat f continu is. Verder: alle functies f_k zijn stijgend, dus f ook. We laten nu zien dat f te $x \in E$ niet differentieerbaar is.



Figuur 3: Grafiek van f_k

Laat $x \in E$ en $m \in \mathbb{N}$. Zij $\epsilon > 0$.

Merk op: Er zijn oneindig veel $k \in \mathbb{N}$ met $x \in I_k \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Dat zie je als volgt: Iedere collectie $\mathcal{I}_n$ bevat een open interval $I_{n,x}$ met $x \in I_{n,x}$. Omdat $|I_{n,x}| \leq |\mathcal{I}_n| < 2^{-n}$ geldt dat $I_{n,x} \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$, als n groot is. De collectie

$$\Omega := \{I_{n,x} : I_{n,x} \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)\}$$

is dus aftelbaar oneindig. Dus

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists k \geq N : I_k \in \Omega.$$

Dat betekent dat er een strikt stijgende rij $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_m$ bestaat met

$$\left[\begin{array}{l} \forall i \in \underline{m} : x \in I_{k_i}, \\ \forall i \in \underline{m} : I_{k_i} \subset (x - \epsilon, x + \epsilon). \end{array}\right.$$

Dan is

$$\bigcap_{i=1}^{m} I_{k_i}$$

een niet-lege open verzameling, bevat in $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Zij y een element van deze doorsnede. Dan geldt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{f_{k_i}(x) - f_{k_i}(y)}{x - y} = \sum_{i=1}^{m} 1 = m.$$

Dat het quotiënt voor $i \in \underline{m}$ gelijk aan 1 is volgt omdat $x, y \in I_{k_i}$ voor iedere $i \in \underline{m}$. Op deze intervallen hebben de functies f_{k_i} een helling van 1.

We hebben dus bewezen dat we voor iedere $m \in \mathbb{N}$ een kleine omgeving kunnen vinden, namelijk de doorsnede van de I_{k_i}, waarop het differentiequotiënt groter of gelijk aan m is. Er geldt dus $f'(x) = +\infty$, voor iedere $x \in E$. In het bijzonder is f, voor $x \in E$, niet te x differentieerbaar. $\blacksquare$

4.13. We weten nu dus het volgende:

1. De verzameling der punten waar een monotone functie niet differentieerbaar is moet verwaarloosbaar zijn.

2. Voor iedere verwaarloosbare verzameling E kunnen we een (continue) monotone functie maken zodat deze in de punten van E niet differentieerbaar is.

5 Monotone functies

Omdat we veel met stijgende (ofwel monotone) functies werken zal ik in dit hoofdstuk een kleine samenvatting van de meest belangrijke eigenschappen geven. De volgende lemma's vormen geen stringent verhaal maar meer een opsomming van belangrijke feiten over stijgende functies.

5.1 Definitie. Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heet **stijgend** als

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in [a, b], \\ x < y \end{array}\right] \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

en **strikt stijgend** als

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in [a, b], \\ x < y \end{array}\right] \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heet **monotoon** als f of $-f$ stijgend is. Voor een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiëren wij

$$\begin{array}{lcl} f \in \mathcal{M}[a, b] & \Longleftrightarrow & f \text{ is monotoon,} \\ f \in \mathcal{M}^+[a, b] & \Longleftrightarrow & f \text{ is stijgend,} \\ f \in \mathcal{M}^+_>[a, b] & \Longleftrightarrow & f \text{ is strikt stijgend.} \end{array}$$

Als duidelijk is, dat f een functie op $[a, b]$ is schrijven we gewoon $\mathcal{M}, \mathcal{M}^+$ en $\mathcal{M}^+_>$.

5.2 Definitie. Zij $f \in \mathcal{M}^+[a, b]$. Voor $c \in [a, b]$ definiëren we

$$f(c-) := \begin{cases} \sup\{f(x) : x < c\} & \text{als } c > a, \\ f(a) & \text{als } c = a \end{cases}$$

en analoog definiëren we

$$f(c+) := \begin{cases} \inf\{f(x) : x > c\} & \text{als } c < b, \\ f(b) & \text{als } c = b. \end{cases}$$

Dat deze uitdrukkingen zin hebben is duidelijk omdat $\emptyset \neq f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$.

5.3 Lemma. *Zij* $f \in \mathcal{M}^+[a,b]$. *Als* $c \in (a,b)$ *dan geldt*

$$f(c+) = \lim_{x \downarrow c} f(x) \quad \text{en} \quad f(c-) = \lim_{x \uparrow c} f(x).$$

Bewijs. Laat $\epsilon > 0$. Dan is er een $t > c$ zodat $f(t) < f(c+) + \epsilon$. Laat $\delta := t - c$. Dan geldt met de definitie van $f(c+)$ en het feit dat f stijgend is dat

$$x \in (c, c+\delta) \qquad \Rightarrow \qquad f(c+) \leq f(x) \leq f(t) < f(c+) + \epsilon.$$

Er geldt dus

$$x \in (c, c+\delta) \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(c+)| < \epsilon,$$

zodat $f(c+) = \lim_{x \downarrow c} f(x)$. Analoog kan men de uitspraak voor $f(c-)$ bewijzen. ■

5.4 Gevolg. Zij $f \in \mathcal{M}^+[a,b]$. Voor $c \in (a,b)$ geldt

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \downarrow c} f(x).$$

Bewijs. Stel $c \in (a,b)$ en $x < c$. Dan $f(x) \leq f(c)$. Dus $f(c-) \leq f(c)$. Net zo $f(c+) \geq f(c)$. Met lemma 5.3 volgt de uitspraak. ■

5.5 Lemma. *Als* $f \in \mathcal{M}^+[a,b]$ *en* D *de verzameling der punten is, waar* f *niet continu is, dan is* D *verwaarloosbaar.*

Bewijs. Laat $c \in D$. Dan geldt $f(c-) \neq f(c+)$, dus met gevolg 5.4 weten we $f(c-) < f(c+)$. Kies $q_c \in (f(c-), f(c+)) \cap \mathbb{Q}$. Dan is $D \to \mathbb{Q} : c \mapsto q_c$ een injectie zodat D aftelbaar is.

De injectiviteit volgt uit het feit dat

$$c < d \qquad \Rightarrow \qquad f(c+) \leq f(d-).$$

Dat volgt makkelijk uit de definitie want bekijk een x met $c < x < d$. Dan geldt $f(c+) \leq f(x) \leq f(d-)$. ■

5.6 Lemma. *Stel* $f \in \mathcal{M}^+[a,b]$. *Dan geldt:* f *is continu op* $[a,b]$ *dan en slechts dan als* $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

Bewijs. ($\Rightarrow$) Uit de topologie weten we dat het continue beeld van een samenhangende verzameling weer samenhangend is. Met behulp van lemma 14.4 geldt dan $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$. De omgekeerde inclusie geldt omdat f stijgend is.

($\Leftarrow$) Stel f is te $c \in [a,b]$ niet continu. Dan $f(c-) < f(c+)$. Laat nu $t \in (f(c-), f(c+)) \subset [f(a), f(b)]$. Per aanname bestaat er een $x \in [a,b]$ met

$f(x) = t$. Uit $f(c-) < t = f(x)$ volgt $x \geq c$ en uit $t = f(x) < f(c+)$ volgt $x \leq c$. Dus $c = x$. Er geldt dus voor elke t in $(f(c-), f(c+))$ dat $f(c) = t$. Dat is een contradictie. ∎

5.7 Definitie. Voor $f \in \mathcal{M}^+[a,b]$ definiëren wij

$$f^{\leftarrow}(y) := \inf\{x \in [a,b] : f(x) \geq y\} \qquad (y \in [f(a), f(b)]).$$

5.8 Lemma. *Stel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is strikt stijgend, dus $f \in \mathcal{M}^+_>$. Dan is $f^{\leftarrow} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ een continue en stijgende linksinverse van f.*

Bewijs. We bewijzen eerst

$$f^{\leftarrow} \circ f = \mathrm{id}_{[a,b]}\,.$$

Laat $x \in [a,b]$. Per definitie van $f^{\leftarrow}$ geldt $f^{\leftarrow}(f(x)) \leq x$. Noem $y := f(x)$. Stel nu $f^{\leftarrow}(y) < x$. We kunnen dus een $x' \in [a,b]$ vinden met $f^{\leftarrow}(y) \leq x' < x$ en $f(x') \geq y$. Maar $x' < x$ impliceert $f(x') < f(x) = y$. Dat is een tegenspraak.

$f^{\leftarrow}$ is stijgend want stel $y \leq y'$ zijn punten van $[f(a), f(b)]$. Dan geldt

$$\{x \in [a,b] : f(x) \geq y'\} \subset \{x \in [a,b] : f(x) \geq y\}.$$

Voor begrensde en niet-lege $A, B \subset \mathbb{R}$ geldt $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$. Hieruit volgt de claim.

Omdat $f^{\leftarrow}$ surjectief en stijgend is volgt nu met lemma 5.6 dat $f^{\leftarrow}$ continu is. ∎

5.9 Lemma. *Als (a_n, b_n) aftelbaar veel onderling disjuncte intervallen in $[a,b]$ zijn, dan geldt*

$$\sum_n (f(b_n) - f(a_n)) \leq f(b) - f(a).$$

Bewijs. Bekijk de eerste N intervallen $(a_1, b_1), \cdots, (a_N, b_N)$. Om $\sum_{n=1}^N (f(b_n) - f(a_n))$ te bepalen kunnen we aannemen dat $a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < b_N$. Dan geldt $f(b_n) \leq f(a_{n+1})$ voor $1 \leq n < N$. Dat geeft

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N (f(b_n) - f(a_n)) &= \sum_{n=1}^N f(b_n) - \sum_{n=1}^N f(a_n) \\
&= f(b_N) - f(a_1) + \sum_{n=1}^{N-1} f(b_n) - \sum_{n=2}^N f(a_n) \\
&= f(b_N) - f(a_1) + \sum_{n=1}^{N-1} (f(b_n) - f(a_{n+1})) \\
&\leq f(b_N) - f(a_1) \leq f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Omdat we over niet-negatieve termen sommeren geldt nu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f(b_n) - f(a_n)) = \sup_N \sum_{n=1}^{N}(f(b_n) - f(a_n)) \leq f(b) - f(a).$$

■

5.10. Een andere ongelijkheid die we in verband met de stelling van Heine en Borel tegen komen is de volgende: Als $(a_1, b_1), \cdots, (a_N, b_N)$ intervallen in $[a, b]$ zijn zodat nooit meer dan twee van deze intervallen elkaar snijden, dan geldt

$$\sum_{n=1}^{N}(f(b_n) - f(a_n)) \leq 2(f(b) - f(a)).$$

Dat kan je als volgt in zien: Na eventuele hernummering kunnen we aannemen dat $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$. Verder kunnen we aannemen dat $a_{n+1} \leq b_n$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}(f(b_n) - f(a_n)) &= \sum_{n=1}^{N} f(b_n) - \sum_{n=1}^{N} f(a_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} f(b_n) + f(b_N) - \sum_{n=1}^{N-1} f(a_{n+1}) - f(a_1) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} (f(b_n) - f(a_{n+1})) + (f(b_N) - f(a_1)) \\
&\leq 2 \cdot (f(b) - f(a)).
\end{aligned}$$

We gebruiken hier lemma 5.9 en het feit dat de collectie $\{(a_{n+1}, b_n) : n \in \underline{N-1}\}$ disjunct is.

5.11 Lemma. *Zij* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *een stijgende functie met de volgende eigenschap:*

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in [a, b], \\ x < y \end{array}\right] \Rightarrow f(y) - f(x) \geq y - x.$$

Als $c < d$ *dan geldt*

$$m^*(f^{-1}((c, d))) \leq m^*((c, d)).$$

Bewijs. Noem $A := f^{-1}((c, d))$. Als A minder dan een element bevat is de bewering triviaal. Anders is A een interval. Dat zien we door middel van lemma 14.4 in. Laat $x, y \in A$ met $x < y$. We bewijzen $[x, y] \subset A$. Laat hiervoor $x \leq z \leq y$. Omdat f stijgend is krijgen we dan

$$c < f(x) \leq f(z) \leq f(y) < d.$$

Dus $z \in A$. Met behulp van de aanname krijgen we

$$m^*(A) = \sup_{\substack{x,y \in A, \\ x<y}} (y - x) \leq \sup_{\substack{x,y \in A, \\ x<y}} (f(y) - f(x)) \leq d - c.$$

■

5.12 Lemma. *Stel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is een functie zodat*

$$D := \{x \in [a, b] : f \text{ niet continu te } x\}$$

aftelbaar is. Dan is f meetbaar.

Bewijs. Laat $r > 0$. We moeten bewijzen dat $f^{-1}((r, \infty))$ meetbaar is. Omdat D aftelbaar is zijn we klaar als

$$A := f^{-1}((r, \infty)) \setminus D$$

meetbaar is. Maar als f te x continu is en $f(x) > r$ dan ook $f(y) > r$ voor $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b]$, waar $\delta_x > 0$ een zeker reëel getal is. Nu geldt

$$A = ([a, b] \setminus D) \cap \left([a, b] \cap \bigcup_{x \in A} (x - \delta_x, x + \delta_x) \right).$$

Het is nu duidelijk dat A meetbaar is. ■

5.13 Gevolg. Iedere stijgende functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is meetbaar.

Bewijs. Volgens lemma 5.5 is de collectie der punten waar f niet continu is aftelbaar zodat we met lemma 5.12 klaar zijn. ■

6 Diniafgeleides

In het volgende bekijken we de zo genaamde Diniafgeleides. In sommige teksten worden deze ook extreme afgeleides genoemt. Zij werden in 1880 door de Italiaanse wiskundige Ulisse Dini ingevoerd. We zullen zien dat deze afgeleides een essentiële rol voor de stelling van Lebesgue spelen. We beginnen met enkele notaties:

6.1 Definitie. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie. Voor $y \in [a, b]$ definiëren wij de differentiequotiënt van f als volgt:

$$(\Delta_y f)(x) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad (x \in [a, b] \setminus \{y\}).$$

6.2. We merken op: voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ met $x \neq y$ geldt

$$(\Delta_y f)(x) = (\Delta_x f)(y).$$

Verder is f te c differentieerbaar dan en slechts dan als $\lim_{x \to c} (\Delta_c f)(x)$ bestaat. Deze, op zijn beurt, bestaat als de linker- en rechterlimiet aan elkaar gelijk zijn. Dat zullen we later nog gebruiken. Nu komt de eigenlijke definitie:

6.3 Definitie. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn. We definiëren de vier **Diniafgeleides** op (a, b) als volgt:

$$\begin{aligned}
(D_r^+ f)(x) &:= \limsup_{y \downarrow x} (\Delta_x f)(y) = \inf_{\epsilon > 0} \sup_{\substack{y \in (x, x+\epsilon), \\ y \in [a,b]}} (\Delta_x f)(y), \\
(D_r^- f)(x) &:= \liminf_{y \downarrow x} (\Delta_x f)(y) = \sup_{\epsilon > 0} \inf_{\substack{y \in (x, x+\epsilon), \\ y \in [a,b]}} (\Delta_x f)(y), \\
(D_l^+ f)(x) &:= \limsup_{y \uparrow x} (\Delta_x f)(y), \\
(D_l^- f)(x) &:= \liminf_{y \uparrow x} (\Delta_x f)(y).
\end{aligned}$$

Merk op dat we hier waarden in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ toelaten.

6.4. De Diniafgeleides spelen een uiteraard elementaire rol in ons verhaal. Zij zijn een zekere indicator hoe zich de differentiequotiënt in de beurt van een punt gedraagt.

We kunnen nu differentieerbaarheid ook als volgt formuleren:
Claim: De functie f is te $x \in (a, b)$ differentieerbaar dan en slechts dan als alle vier Diniafgeleides aan elkaar gelijk en eindig zijn.

Bewijs. ($\Leftarrow$) Stel dat de Diniafgeleides allemaal gelijk aan $L \in \mathbb{R}$ zijn. Dan zijn we klaar als voor elke $x \in (a, b)$:

$$\lim_{y \uparrow x} (\Delta_x f)(y) = L = \lim_{y \downarrow x} (\Delta_x f)(y).$$

Voor de rechterlimiet beschouwen we $(D_r^+ f)(x) = L = (D_r^- f)(x)$. Laat $\epsilon > 0$. Met $L - \epsilon < (D_r^- f)(x) = L = (D_r^+ f)(x) < L + \epsilon$ vinden we $\delta_1 > 0$ en $\delta_2 > 0$ zodanig dat

$$y \in (x, x + \delta_1) \qquad \Rightarrow \qquad (\Delta_x f)(y) < L + \epsilon$$

en

$$y \in (x, x + \delta_2) \qquad \Rightarrow \qquad (\Delta_x f)(y) > L - \epsilon.$$

Met $\delta := \delta_1 \wedge \delta_2$ zien we dat

$$y \in (x, x + \delta) \qquad \Rightarrow \qquad |L - (\Delta_x f)(y)| < \epsilon,$$

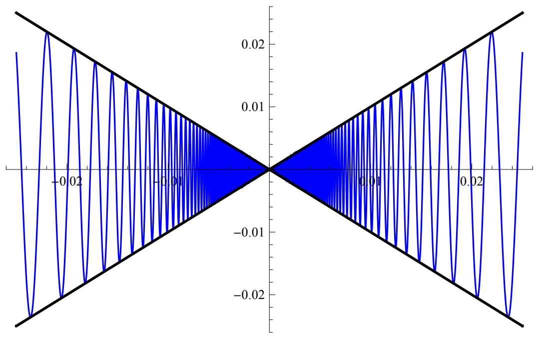
zodat $\lim_{y \downarrow x} (\Delta_x f)(y) = L$. Door D_l^- en D_l^+ in het punt x te bekijken zie je net zo dat $\lim_{y \uparrow x} (\Delta_x f)(y) = L$.

Verder zie je makkelijk dat als f te x differentieerbaar is, met $f'(x) = L \in \mathbb{R}$, dan zijn alle vier Diniafgeleides gelijk aan L. ■

6.5 Voorbeeld. Om een gevoel voor de betekenis van de Diniafgeleides te krijgen bekijken we een klein voorbeeld. Maak $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{als } x \neq 0, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Figuur 4 maakt de situatie in een omgeving van 0 duidelijk.



Figuur 4: De grafiek van $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$.

We zien dat f tussen de rechte lijnen $x \mapsto x$ en $x \mapsto -x$ ligt. Het blijkt zo te zijn dat deze lijnen in dit voorbeeld precies aangeven wat de Diniafgeleides zijn.
Claim: $(D_r^+ f)(0) = 1$.

Bewijs.

$$(\Delta_0 f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \sin \frac{1}{x}.$$

We willen dus laten zien dat

$$(D_r^+ f)(0) = \inf_{\epsilon > 0} \sup_{x \in (0, \epsilon)} \sin \frac{1}{x} = 1.$$

Dat $(D_r^+ f)(0) \leq 1$ is volgt makkelijk omdat de sinus door 1 begrensd is. We hoeven dus alleen te laten zien dat

$$1 \leq \inf_{\epsilon > 0} \sup_{x \in (0, \epsilon)} \sin \frac{1}{x}.$$

Laat dus $\epsilon > 0$. Kies dan $k \in \mathbb{N}$ zodat

$$x_0 := \frac{2}{\pi(1 + 4k)}$$

kleiner dan ϵ is. Nu geldt

$$\sin \frac{1}{x_0} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1.$$

Dus voor elke $\epsilon > 0$ geldt

$$1 \leq \sup_{x \in (0,\epsilon)} (\Delta_0 f)(x).$$

Dat bewijst de claim. ■

We gaan nu nog naar een aantal elementaire eigenschappen van de Diniafgeleides kijken.

6.6 Lemma. *Als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stijgend is, dan zijn alle Diniafgeleides niet-negatief.*

Bewijs. Merk op dat $(\Delta_x f)(y) \geq 0$ voor alle $x, y \in [a,b]$. Omdat de verzameling der niet-negatieve reële getallen gesloten is volgt nu met de definitie van de Diniafgeleides dat deze allemaal niet-negatief zijn. ■

6.7 Lemma. *Als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is en $D_r^+ f \geq 0$ op $[a,b]$ dan is f stijgend.*

Bewijs. **(I)** Stel eerst dat $(D_r^+ f)(x) > 0$ voor elke $x \in [a,b]$. We bewijzen uit het ongerijmde: Stel dat f niet stijgend is. Door f eventueel te beperken kunnen we aannemen dat $f(a) > f(b)$. Kies een t met $f(a) > t > f(b)$. Dan kunnen we definiëren

$$c := \sup\{x \in [a,b] : f(x) \geq t\}.$$

Omdat $f(b) < t$ weten we ook dat $c < b$. Dan geldt

$$f\left(c + \frac{1}{n}\right) < t,$$

voor n zo groot dat $c + \frac{1}{n} \in (c,b]$ (Merk op: deze n-en bestaan omdat $c < b$). Omdat f continu is geldt dan

$$f(c) = \lim_n f\left(c + \frac{1}{n}\right) \leq t.$$

Ook vinden we met de continuïteit van f dat de verzameling $\{x \in [a,b] : f(x) \geq t\}$ gesloten is, zodat c in deze verzameling bevat is. Dus moet gelden $f(c) \geq t$. Samen met de vorige conclusie geldt dus $f(c) = t$.

Laat nu $\epsilon > 0$ en kies een willekeurige $y \in (c, c+\epsilon) \cap [a,b]$. Per definitie van c geldt dan $f(y) < t = f(c)$. Dus

$$(\Delta_c f)(y) < 0.$$

Hiermee geldt $\sup_{y\in(c,c+\epsilon)}(\Delta_c f)(y) \leq 0$ voor elke $\epsilon > 0$. Dat betekent $(D_r^+ f)(c) \leq 0$. Dat is een tegenspraak met de aanname. Dus $f(a) \leq f(b)$.

(II) Neem nu aan $D_r^+ f \geq 0$ op $[a,b]$. We maken nu $g_\delta(x) = f(x) + \delta x$ voor $x \in [a,b]$ en $\delta > 0$. Dan geldt $(D_r^+ g_\delta)(x) \geq \delta > 0$. Met **(I)** is g_δ stijgend. Dan ook $f = \lim_{\delta\downarrow 0} g_\delta$.

■

6.8 Definitie. Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $R \in \mathbb{R}$. Dan definiëren wij

$$x \in S_r(\Delta f > R) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Voor elke } \epsilon > 0 \text{ is er een } t \in (x, x+\epsilon) \cap (a,b) \\ \text{met } (\Delta_x f)(t) > R.\end{array}\right.$$

$$x \in S_l(\Delta f > R) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Voor elke } \epsilon > 0 \text{ is er een } t \in (x-\epsilon, x) \cap (a,b) \\ \text{met } (\Delta_x f)(t) > R.\end{array}\right.$$

Analoog maken we $S_r(\Delta f < r)$ en $S_l(\Delta f < r)$ voor $r \in \mathbb{R}$. Een relatie tot de Diniafgeleides is de volgende:

6.9 Lemma. *Voor $x \in (a,b)$ geldt*

$$\begin{array}{lcl}
(D_r^+ f)(x) > R & \Rightarrow & x \in S_r(\Delta f > R), \\
(D_r^+ f)(x) < r & \Rightarrow & x \in S_r(\Delta f < r), \\
(D_r^- f)(x) > R & \Rightarrow & x \in S_r(\Delta f > R), \\
(D_r^- f)(x) < r & \Rightarrow & x \in S_r(\Delta f < r).
\end{array}$$

Deze implicaties gelden ook als we het subscript r door l vervangen.

Bewijs. Ik bewijs alleen de eerste twee implicaties. De andere zijn op soortgelijke manier te bewijzen.

(I) Stel $(D_r^+ f)(x) > R$. Dan geldt

$$\inf_{\epsilon>0} \sup_{t\in(x,x+\epsilon)} (\Delta_x f)(t) > R.$$

Laat $\epsilon > 0$. Dan geldt $R < \sup\limits_{t\in(x,x+\epsilon)} (\Delta_x f)(t)$ dus is er een $t \in (x, x+\epsilon)$ met $R < (\Delta_x f)(t)$. Hieruit volgt dat $x \in S_r(\Delta f > R)$.

(II) Stel $(D_r^+ f)(x) < r$. Dan is er een $\delta > 0$ met $\sup\limits_{t\in(x,x+\delta)} (\Delta_x f)(t) < r$. Laat $\epsilon > 0$ en $\gamma := \epsilon \wedge \delta$. Dan geldt

$$t \in (x, x+\gamma) \qquad \Rightarrow \qquad (\Delta_x f)(t) < r.$$

In het bijzonder is er dus een $t \in (x, x+\epsilon)$ met $(\Delta_x f)(t) < r$. Dus $x \in S_r(\Delta f < r)$.

(III) De andere twee implicaties bewijs je analoog.

■

6.10. De omgekeerde implicaties hoeven in het algemeen niet waar te zijn omdat de strikte ongelijkheid bij het nemen van suprema en infima misschien verloren gaat. We spreken nu over de Borelmeetbaarheid van deze verzamelingen.

6.11 Lemma. *Stel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is een stijgende functie. De verzamelingen zoals in definitie 6.8 zijn dan Borelmeetbaar, en in het bijzonder dus meetbaar. (Merk op dat we de Lebesgue-meetbare verzamelingen meetbaar noemen.)*

Bewijs. We bewijzen dat $S_r(\Delta f > R)$ een Borelverzameling in (a, b) is. Met analoge redenatie laat zich bewijzen dat de andere verzamelingen ook Borelmeetbaar zijn. Maak ten eerste

$$X_\epsilon := \{x \in (a, b) : \exists t \in (x, x + \epsilon) \text{ met } (\Delta_x f)(t) > R\}.$$

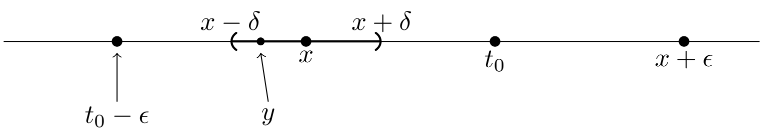
Dan geldt

$$S_r(\Delta f > R) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{1/n}.$$

We zijn dus klaar als elke X_ϵ Borelmeetbaar is. Stel $x \in X_\epsilon$ en neem aan dat f te x continu is. Met $x \in X_\epsilon$ vinden we een t_0 in $(x, x + \epsilon)$ zó dat

$$\frac{f(x) - f(t_0)}{x - t_0} > R.$$

Omdat de functie $\Delta_{t_0} f$ te x continu is zien we dat $(\Delta_{t_0} f)(y) > R$ als we y in een kleine δ-omgeving van x kiezen. Door δ eventueel kleiner te maken kunnen we $\delta > 0$ zo kiezen dat $x < x + \delta < t_0$ en $\delta < (x + \epsilon) - t_0$. Laat nu $y \in (x - \delta, x + \delta)$. We willen laten zien dat $y \in X_\epsilon$. We zijn klaar als $t_0 \in (y, y + \epsilon)$. In figuur 5



Figuur 5: Situatie in lemma 6.11.

wordt de situatie duidelijk. Er geldt $(\Delta_{t_0} f)(y) > R$. We hebben verder gegeven

$$\left[\begin{array}{l} y \in (x - \delta, x + \delta), \\ \delta < t_0 - x, \\ \delta < (x - t_0) + \epsilon. \end{array}\right.$$

Dus $t_0 > \delta + x > y$ zodat $t_0 > y$. Verder

$$t_0 < (x - \delta) + \epsilon < y + \epsilon.$$

Dus $t_0 \in (y, y + \epsilon)$ zodat $y \in X_\epsilon$. Blijkbaar is $X_\epsilon \setminus \operatorname{int}(X_\epsilon)$ bevat in de collectie der discontinuïteitspunten van f, en dus aftelbaar. Nu geldt

$$X_\epsilon = (X_\epsilon \cap \operatorname{int}(X_\epsilon)) \cup (X_\epsilon \setminus \operatorname{int}(X_\epsilon)).$$

Dus is X_ϵ Borelmeetbaar (en dus ook meetbaar). ■

6.12 Lemma. *Stel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is stijgend. Dan zijn de Diniafgeleides van f Borelmeetbaar. In het bijzonder is dan ook de verzameling der punten x waarvoor $D(x) > R$ geldt Borelmeetbaar, waar D een van de vier Diniafgeleides is.*

Bewijs. We laten zien dat $D_r^+ f$ Borelmeetbaar is. Voor m, n natuurlijke getallen met $m < n$ maken we de functie

$$D_{m,n}(x) := \sup_{t \in \left(x + \frac{1}{n}, x + \frac{1}{m}\right)} (\Delta_x f)(t) \qquad (x \in (a,b)).$$

Er geldt $D_r^+ f = \lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{n \to \infty} D_{m,n}$. Laat nu $a \in \mathbb{R}$. We zijn klaar als de verzameling

$$A := \{x \in (a,b) : D_{m,n}(x) > a\}$$

meetbaar is, voor elke $m < n$ in $\mathbb{N}$. We passen een soortgelijke redenatie als in 6.11 toe. Stel $x \in A$ en neem aan dat f te x continu is. Met $x \in A$ geldt dan

$$\sup_{t \in \left(x + \frac{1}{n}, x + \frac{1}{m}\right)} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} > a.$$

Er is dus een $t_0 \in (x + \frac{1}{n}, x + \frac{1}{m})$ met $a < (\Delta_{t_0} f)(x)$. Met de continuïteit van f te x volgt nu dat deze relatie ook in een kleine δ-omgeving van x geldt. We moeten ervoor zorgen dat $t_0 \in (y + \frac{1}{n}, y + \frac{1}{m})$ geldt, als $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Dat kunnen we doen, door δ weer klein genoeg te kiezen. Dan geldt

$$y \in (x - \delta, x + \delta) \qquad \Rightarrow \qquad a < (\Delta_{t_0} f)(y).$$

Per definitie van $D_{m,n}$ krijgen we ook dat

$$y \in (x - \delta, x + \delta) \qquad \Rightarrow \qquad a < D_{m,n}(y).$$

Met hetzelfde argument als in lemma 6.11 volgt de claim. ■

6.13. Laat $R \in \mathbb{R}$. Samenvattend kunnen we dan het volgende zeggen:

(1) $(D_r^+ f)^{-1}((R, \infty)) \subset S_r(\Delta f > R)$.

(2) $(D_r^+ f)^{-1}((R, \infty))$ en $S_r(\Delta f > R)$ zijn beide Borelmeetbaar.

Analoge uitspraken gelden natuurlijk ook voor de overige Diniafgeleides.

7 De stelling van Lebesgue

Ter herhaling schrijven we de hoofdstelling nu nog een keer expliciet op:

7.1 Stelling (Lebesgue, 1904)**.** *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een stijgende functie zijn. Dan is f bijna overal differentieerbaar. In het bijzonder moet f' bijna overal gedefinieerd en eindig zijn.*

7.2. De stelling werd door Lebesgue eerst voor het geval bewezen dat f continu is. Als we het over de stelling van Lebesgue hebben refereren wij toch naar stelling 7.1, die een algemenere situatie beschrijft. Als we expliciete aannames over de continuïteit van f maken, wordt dit in de tekst duidelijk gemaakt.

We zullen ons nu intensief met deze stelling bezig houden. Om de bewijsmethodes beter te kunnen begrijpen zal ik ten eerste laten zien welke informatie we nodig hebben om de stelling te kunnen bewijzen. We kunnen de differentieerbaarheid tot het bestaan van zekere Diniafgeleides en het eindig zijn daarvan reduceren.

7.3. Om de stelling van Lebesgue te kunnen bewijzen hoeven we ons over de randpunten van $[a, b]$ geen zorgen te maken omdat $\{a, b\}$ een verwaarloosbare verzameling vormt. Daarom zullen we ons in het volgende tot het interval (a, b) beperken omdat we met dit open interval makkelijker kunnen werken. Merk op dat eerdere definities, met betrekking tot differentieerbaarheid, ook over het inwendige gaan, en de randpunten buiten beschouwing laten.

7.4. Nu we Diniafgeleides als hulpmiddel ter beschikking hebben, kunnen we twee sleuteleigenschappen voor stijgende functies formuleren die aan het originele probleem equivalent zijn. Deze twee eigenschappen kunnen we dan op een aantal verschillende manieren bewijzen, waaruit de stelling van Lebesgue volgt.

7.5. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een stijgende functie zijn, niet noodzakelijk continu. Maak

$$E_\infty := \{x \in (a, b) : f'(x) = +\infty\}.$$

Dan zijn we klaar als $f'(x)$ voor bijna elke x in $\mathbb{R}$ gedefinieerd is (zie conventie 2.1) en E_∞ een verwaarloosbare verzameling is. Neem aan dat we het volgende voor **elke** stijgende functie f op een interval $[a, b]$ weten:

(A) $D_l^- f \geq D_r^+ f$, bijna overal.

(B) $D_r^+ f < \infty$, bijna overal.

Claim: (A) en (B) zijn voldoende om stelling 7.1 te kunnen bewijzen.

Bewijs. Maak de functie $g : (-b, -a) \to \mathbb{R}$ door $g(x) = -f(-x)$. Voor $x \in (-b, -a)$ geldt

$$\begin{aligned}(D_l^- g)(x) &= \sup_{\epsilon > 0} \inf_{y \in (x-\epsilon, x)} \frac{-f(-y) + f(-x)}{y - x} \\ &= \sup_{\epsilon > 0} \inf_{z \in (-x, -x+\epsilon)} \frac{f(-x) - f(z)}{(-x) - z} \\ &= (D_r^- f)(-x).\end{aligned}$$

Analoog vinden we dat

$$(D_r^+ g)(x) = (D_l^+ f)(-x).$$

Omdat g stijgend is kunnen we (A) op g toepassen. Voor $x \in (-b, -a)$ krijgen we dan

$$(D_l^- g)(x) = (D_r^- f)(-x) \geq (D_r^+ g)(x) = (D_l^+ f)(-x)$$

dus $D_r^- f \geq D_l^+ f$, bijna overal. Dat geeft samen

$$D_r^+ f \leq D_l^- f \leq D_l^+ f \leq D_r^- f \leq D_r^+ f,$$

bijna overal. Hieruit volgt dat $f'(x)$ voor bijna elke x in (a, b) waarden in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ aanneemt omdat de Diniafgeleides bijna overal aan elkaar gelijk zijn. Met (B) volgt nu triviaal dat deze dan ook bijna overal eindig moeten zijn zodat E_∞ verwaarloosbaar is. De stelling van Lebesgue volgt. ■

De taak is dus (A) en (B) te bewijzen. Het is dan handig om bij het reduceren nog een stap verder te gaan door eigenschappen van de Lebesgue-buitenmaat te gebruiken, zoals we in de volgende paragraaf zullen zien.

7.6. Om (A) te bewijzen kunnen we laten zien dat de verzameling

$$E = \{x \in (a, b) : (D_l^- f)(x) < (D_r^+ f)(x)\}$$

een verwaarloosbare verzameling is. Maken we

$$E_{rR} := \{x \in (a, b) : (D_l^- f)(x) < r < R < (D_r^+ f)(x)\} \qquad (0 < r < R)$$

dan zien we

$$E = \bigcup_{\substack{0<r<R, \\ r,R \in \mathbb{Q}}} E_{rR}.$$

We zien dus dat het genoeg is als iedere E_{rR} verwaarloosbaar is.

Samenvattend weten we nu dat de stelling van Lebesgue waar is als

$$m^*(E_{rR}) = 0 \text{ voor elke } 0 < r < R, \tag{7.1}$$

$$m^*(E_\infty) = 0. \tag{7.2}$$

Omdat deze verzamelingen zo een cruciale rol spelen houden we dit als definitie vast:

7.7 Definitie. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een stijgende functie zijn. Dan associëren wij twee verzamelingen E_{rR} en E_∞ met f. Deze zijn gegeven door

$$E_{rR} := \{x \in (a, b) : (D_l^- f)(x) < r < R < (D_r^+ f)(x)\}$$

en

$$E_\infty := \{x \in (a, b) : f'(x) = +\infty\}.$$

Hierbij merken we op dat we E_{rR} ook kunnen schrijven als

$$E_{rR} = (D_l^- f)^{-1}((-\infty, r)) \cap (D_r^+ f)^{-1}((R, +\infty)).$$

In het bijzonder zien we met lemma 6.12 dat E_{rR} meetbaar is.

7.8. We kunnen ons nu volledig met de vraag bezig houden, hoe we formules (7.1) en (7.2) kunnen bewijzen.

8 Bewijsmethodes

In het vorige hoofdstuk hebben we geanalyseerd wat we precies nodig hebben om de stelling van Lebesgue te kunnen bewijzen, namelijk (7.1) en (7.2). Er zijn een aantal verschillende manieren om deze beweringen te bewijzen. Het doel van de scriptie is dat we een aantal bewijsmethodes op een heldere manier behandelen en met elkaar vergelijken. De in het volgende gepresenteerde methodes zijn naar persoonlijke voorkeur gekozen en zodanig dat zij de achterliggende principes, die voor waarheid van de stelling van Lebesgue verantwoordelijk zijn, proberen duidelijk te maken. We kunnen de bewijzen grofweg in drie stukken verdelen:

(I) Het continue geval bewijzen.

(II) Het algemene geval door middel van **(I)** bewijzen.

(III) Het algemene geval adhoc bewijzen.

We zullen zien dat **(I)** vrij makkelijk te doen is, zodat **(II)** een aantrekkelijke keuze is. Maar er zijn ook voordelen om meteen aanpak **(III)** te kiezen. Nadat we een betere overzicht over de bewijsmethodes hebben, zullen we op de voor- en nadelen nog dieper ingaan.

Nu behandelen we eerst een aantal technieken, die de basis voor ons werk vormen.

8.1 Rijzende zon

8.2 Lemma (Rijzende zon, Riesz [4], 1932)**.** *Zij* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *een continue functie. Maak*

$$U_f := \{x \in (a, b) : \textit{Er is een } y \in (x, b] \textit{ met } f(y) > f(x)\}.$$

Dan is U_f *open. Als* $U_f \neq \emptyset$ *laat* (α, β) *een component van* U_f *zijn. Dan geldt*

$$f(\alpha) \leq f(\beta).$$

Voor $\alpha \neq a$ *geldt bovendien* $f(\alpha) = f(\beta)$.

Bewijs. **(I)** Stel $x \in U_f$. Dan is er een $y > x$ met $f(y) > f(x)$. Omdat f continu is kunnen we een $\delta > 0$ vinden zodat $\delta < y - x$ en

$$x' \in (x - \delta, x + \delta) \qquad \Rightarrow \qquad f(y) > f(x').$$

Dat bewijst dat U_f open is.

Laat nu (α, β) een component van U_f zijn. Kies $x \in (\alpha, \beta)$ en maak

$$A := \{t \in [x, \beta] : f(t) \geq f(x)\}.$$

Dan is A begrensd en niet-leeg zodat $s := \sup A$ bestaat. Omdat A gesloten is (f is continu) geldt $s \in A$, dus zeker $s \leq \beta$. Bewering : $s = \beta$.

Stel $s < \beta$. Per definitie van A moet gelden $f(\beta) < f(x)$. Bovendien geldt $s \in [x, \beta) \subset (\alpha, \beta) \subset U_f$ zodat er een $y \in (s, b]$ is met $f(y) > f(s)$. We onderscheiden nu twee gevallen:

- Stel $y \in (s, \beta]$. Met $f(y) > f(s) \geq f(x)$ geldt $y \in A$ dus $y \leq s$. Tegenspraak.
- Stel $y \in (\beta, b]$. Er geldt $f(y) > f(s) \geq f(x) > f(\beta)$ dus $f(y) > f(\beta)$ met $y > \beta$. Dus $\beta \in U_f$. Tegenspraak.

Er geldt dus $f(x) \leq f(\beta)$, voor alle $x \in (\alpha, \beta)$. Met de continuïteit van f volgt:

$$f(\alpha) = f(\alpha+) = \lim_{x \downarrow \alpha} f(x) \leq f(\beta).$$

(II) Laat nu (α, β) een component van U_f zijn met $\alpha > a$. Stel $f(\alpha) < f(\beta)$. Omdat $\alpha \in (a, b)$ en $f(\alpha) < f(\beta)$ geldt dus $\alpha \in U_f$. Tegenspraak. Dus $f(\alpha) = f(\beta)$.

Merk op: Voor $\alpha = a$ geldt in het algemeen **niet** $f(\alpha) = f(\beta)$.

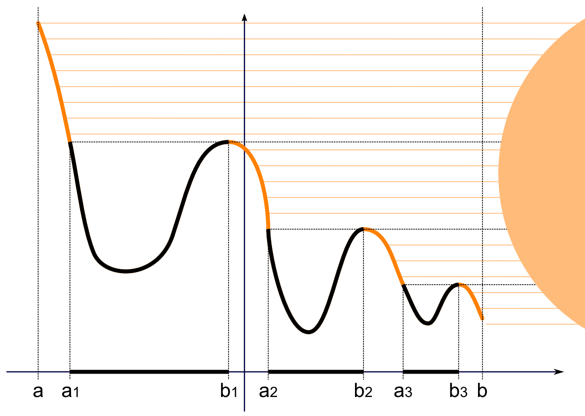
$\blacksquare$

8.3. In figuur 6 zie je duidelijk waar de naam van het lemma van de rijzende zon vandaan komt. We merken nog op dat je een analoge versie kunt formuleren als de zon op de negatieve x-as opgaat. Als dus

$$U = \{x \in (a, b) \mid \exists y < x : f(y) < f(x)\},$$

dan geldt voor een component (α, β) van U ook $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

Bekijk hiervoor de functie $g(x) = -f(-x)$ op $[-b, -a]$. Als $x \in U$ dan $-x < -y$ en $-f(-(-y)) > -f(-(-x))$. Dus $-x < -y$ en $g(-y) > g(-x)$. Door lemma 8.2 op g en $-U$ toe te passen vinden we componenten $(-\beta_n,\ -\alpha_n)$ van $-U$ met $g(-\beta_n) \leq g(-\alpha_n)$ ofwel $-f(\beta_n) \leq -f(\alpha_n)$. Dat geeft $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$, waar (α_n, β_n) de componenten van U zijn.



Figuur 6: De zon gaat op de positieve x-as op. Bron: Wikipedia.

8.4 Lemma (Rijzende zon, Faure [7], 2003)**.** *Zij* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continu en* U *in* (a, b) *open. Dan maken we*

$$U_f := \{x \in U : \textit{Er is een } y < x \textit{ met } f(y) < f(x) \textit{ en } (y, x) \subset U\}.$$

Als (α, β) *een component van* U_f *is geldt* $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

Bewijs. Omdat $U \subset (a, b)$ open is kunnen we U in zijn componenten ontbinden:

$$U = \bigcup (a_n, b_n).$$

Maak dan $f_n := f \restriction [a_n, b_n]$. Noteer

$$E_n := \{x \in (a_n, b_n) : \exists y \in (x, b_n] : f(y) > f(x)\}.$$

Dan geldt

$$U_f = \bigcup E_n.$$

Bekijk dan een component (α, β) van U_f. Omdat de E_n-en onderling disjunct en open in (a_n, b_n) zijn is (α, β) een component van een zekere E_n. Door de versie van Riesz (8.2) op f_n toe te passen zien we dat $f_n(\alpha) \leq f_n(\beta)$, ofwel $f(\alpha) \leq f(\beta)$. ■

8.5. We zien dus dat de versie van Faure makkelijk uit die van Riesz af te leiden is. Soms is het handiger om over de versie van Faure te beschikken omdat we dan niet per component van de open verzameling hoeven te werken.

8.6. Als we in verband met het lemma van de rijzende zon een verzameling zoals U_f zien dan weten we meteen dat zo een verzameling te schrijven is als disjuncte vereniging van intervallen (α_n, β_n) zodat $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$. Dit gebruiken we vaker, zonder referentie.

8.7 Vitali-overdekkingen

8.8 Definitie. Laat $E \subset \mathbb{R}$ een begrensde verzameling zijn. Een collectie $\mathcal{I}$ van niet-lege compacte intervallen van positieve lengte heet een **Vitali-overdekking** van E als voor elke $x \in E$ een $I \in \mathcal{I}$ bestaat met $x \in I$ en $m(I) < \epsilon$.

8.9 Lemma. *Laat $\mathcal{I}$ een Vitali-overdekking van een begrensde verzameling $E \subset \mathbb{R}$ zijn. Laat $\epsilon > 0$. Dan zijn er onderling disjuncte $I_1, \cdots, I_N \in \mathcal{I}$ zodat*

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \epsilon.$$

In het bijzonder[1] *geldt dan*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) > m^*(E) - \epsilon.$$

Bewijs. **(I)** Laat $\epsilon > 0$. Laat $O \supset E$ een begrensde open verzameling zijn die E omvat. We kunnen z.b.d.a. aannemen dat elke $I \in \mathcal{I}$ in O bevat is.

(II) We maken nu een rij $(I_n)_{n=1}^{m}$ van intervallen in $\mathcal{I}$ met $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

(i) Kies $I_1 \in \mathcal{I}$ willekeurig.

[1] Bedenk dat $m^*(A) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) \leq m^*(B) + m^*(A \setminus B)$, wat uit de monotonie en subadditiviteit van m^* volgt.

(ii) Laat Ω de verzameling van rijtjes $(J_1, \cdots, J_n) \in \mathcal{I}^n$ zijn, voor $n \in \mathbb{N}$, zó dat $E \not\subset J_1 \cup \cdots \cup J_n$ en de J_k-en onderling disjunct zijn. Laat Ω_c de verzameling van alle rijen $(J_1, J_2, \cdots, J_N, J_{N+1}, \cdots, J_{N+K})$ zijn waar $(J_1, \cdots, J_{N-1}) \in \Omega$ en $J_N = J_{N+1} = J_{N+2} = \cdots = J_{N+K}$, $K \geq 1$ en $J_1 \cup \cdots \cup J_N \supset E$. Verder eisen we dat $J_r \cap J_N = \emptyset$ voor $r \in \underline{N-1}$.

(iii) **Opmerking:** Als $(J_1, J_2, \cdots, J_n) \in \Omega$, dan bestaat

$$k_{J_1,\cdots,J_n} := \sup\{m(I) : I \in \mathcal{I} \text{ en } \forall r \in \underline{n} : I_r \cap I = \emptyset\}.$$

Dat is zo omdat $J_1 \cup \cdots \cup J_n$ een gesloten verzameling is, zodat er intervallen $I \in \mathcal{I}$ moeten bestaan met $I \subset E \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_n)$. Verder hadden we aangenomen dat alle $I \in \mathcal{I}$ in O bevat zijn, waarbij O begrensd is.

(iv) **Gevolg:** Stel $(J_1, J_2, \cdots, J_n) \in \Omega$. Dan bestaat er een $J \in \mathcal{I}$ zodat

$$\left[\begin{array}{l} \forall r \in \underline{n} : J \cap J_r = \emptyset, \\ m(J) > \frac{1}{2} k_{J_1,\cdots,J_n}. \end{array}\right.$$

(v) Merk op dat $\Omega \cap \Omega_c = \emptyset$. We maken nu door middel van het keuzeaxioma een functie $\Phi : \Omega \cup \Omega_c \to \Omega \cup \Omega_c$. Als $(J_1, J_2, \cdots, J_n) \in \Omega$ dan is $\Phi(J_1, \cdots, J_n)$ een interval J zoals in (iv). Als $(J_1, J_2, \cdots, J_n) \in \Omega_c$ dan laten we $\Phi(J_1, \cdots, J_n) := J_n$.

(vi) Noem nu een rijtje $(J_1, \cdots, J_n) \in \Omega \cup \Omega_c$ **bruikbaar** als $J_1 = I_1$ en als $\Phi(J_1, \cdots, J_k) = J_{k+1}$, voor $1 \leq k \leq n-1$.

(vii) **Bewering:** Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ bestaat er één bruikbaar rijtje

$$(J_1^n, \cdots, J_n^n).$$

Bewijs. We bewijzen dit met volledige inductie: Voor $n = 1$ is (I_1) de enige bruikbare rij ter lengte 1.

Nu voor $n > 1$: Stel we weten dat er precies één bruikbare rij $(J_1^n, \cdots, J_n^n)$ is. Duidelijk is

$$(J_1^n, \cdots, J_n^n, \Phi(J_1^n, \cdots, J_n^n))$$

een bruikbaar rijtje van lengte $n+1$. Dat dit de enige keuze is volgt uit de definitie van „bruikbaar". ■

(viii) Nu kiezen we

$$I_n := J_n^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(ix) De zo gevonden rij heeft nu de volgende eigenschp: Als er een minimale N is met $I_k = I_N$ voor $k \geq N$, dan geldt $E \subset I_1 \cup \cdots \cup I_N$, waar de I_n-en onderling disjunct zijn. Laat $m := N$.

Als zo'n N niet bestaat hoeven ons rij niet in te korten. Laat dan $m := \infty$.

De zo gevonden rij heeft dus de vorm $(I_n)_{n=1}^m$ waar $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nu zijn alle I_n-en onderling disjunct en er geldt $m(I_n) > \frac{1}{2} m(I_{n-1})$.

(x) Als nu $m < \infty$, dan hebben we gezien dat $I_1 \cup \cdots \cup I_m \supset E$, zodat onze stelling duidelijk bewezen is. We kunnen dus aannemen dat $m = \infty$.

(III) Omdat alle intervallen in O bevat zijn volgt met hun disjunctheid dat $\sum m(I_n) < \infty$. Er bestaat dus een $N \in \mathbb{N}$ zodat

$$\sum_{n>N} m(I_n) < \frac{\epsilon}{5}.$$

Laat $C := I_1 \cup \cdots \cup I_N$ zijn en $R := E \setminus C$. Als we kunnen bewijzen dat $m^*(R) < \epsilon$ zijn we klaar.

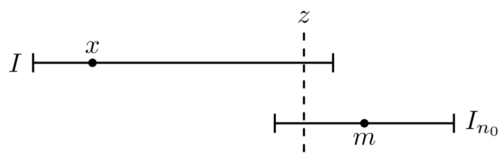
(IV) Laat $x \in R$. Dan $x \notin C$. Maar C is open dus we kunnen een interval $I \in \mathcal{I}$ vinden met $x \in I$ en $I \cap C = \emptyset$.

Bekijk nu algemeen het volgende: Stel $I \in \mathcal{I}$. Als $I \cap I_r = \emptyset$ voor $r \in \underline{n}$, dan geldt $m(I) \leq k_{I_1,\cdots,I_n} < 2m(I_{n+1})$. Als dat voor elke n geldt krijgen we dus dat $m(I) = 0$ omdat $m(I_n) \to 0$. Dat kan niet omdat $\mathcal{I}$ alleen intervallen van positieve lengte bevat. Er is dus een n_0 met $I \cap I_{n_0} \neq \emptyset$. Kies die n_0 zo klein mogelijk. Omdat $I \cap C = \emptyset$ moet dus gelden $n_0 > N$. Omdat I met $I_1, \cdots, I_{n_0-1}$ disjunct is geldt $m(I) \leq k_{I_1,\cdots,I_{n_0-1}} < 2m(I_{n_0})$.

Laat $z \in I \cap I_{n_0}$ en zij m het middelpunt van I_{n_0}. Dan geldt (zie figuur 7)

$$\begin{aligned} |x - m| &\leq |x - z| + |z - m| \leq m(I) + \frac{1}{2} m(I_{n_0}) \\ &< 2m(I_{n_0}) + \frac{1}{2} m(I_{n_0}) = \frac{5}{2} m(I_{n_0}). \end{aligned}$$

Laat m_n het middelpunt van I_n zijn. Maak dan



Figuur 7: Afstand van x en m.

$$J_n := \left[m_n - \frac{5}{2} m(I_n), m_n + \frac{5}{2} m(I_n) \right] \qquad (n > N).$$

Dan zien we dat $x \in J_{n_0}$ met $n_0 > N$ en dus

$$R \subset \bigcup_{n>N} J_n.$$

Met de eigenschappen van de buitenmaat geldt dan

$$m^*(R) \leq \sum_{n>N} m^*(J_n) = 5 \sum_{n>N} m^*(I_n) < \epsilon.$$

We zijn dus klaar. ∎

8.10. We hebben nu twee belangrijke lemma's bewezen: Het lemma van de rijzende zon en het lemma van Vitali. Nadat we beide lemma's hebben toegepast zullen we bespreken in hoeverre zij vergelijkbaar zijn.

9 Het continue geval

9.1. In het volgende bekijken we stijgende functies $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die ook continu zijn, dus $f \in C[a, b] \cap \mathcal{M}^+[a, b]$. De stelling van Lebesgue, voor deze functies, heeft hijzelf in 1904 bewezen. Riesz heeft dit ook in 1932 gedaan, door het lemma van de rijzende zon zoals in 8.2 te gebruiken.

9.2 Hulpstelling. *Stel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is stijgend en continu. Stel $E \subset S_r(\Delta f > R)$. Dan*

$$m^*(E) \leq \frac{f(b) - f(a)}{R}.$$

Bewijs. Maak $G : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - Rx$. We passen lemma 8.2 op G toe en vinden $U_G = \bigcup(a_n, b_n)$ zodat $G(a_n) \leq G(b_n)$ dus $f(a_n) - Ra_n \leq f(b_n) - Rb_n$. Dat is equivalent aan

$$R(b_n - a_n) \leq f(b_n) - f(a_n).$$

Verder geldt $E \subset U_G$ want laat $x \in E \subset (a, b)$. Per aanname kunnen we een $y \in (a, b)$ vinden met $y > x$ en

$$f(y) - f(x) > R(y - x),$$

ofwel $f(y) - Ry > f(x) - Rx$ dus $G(y) > G(x)$. Dan geldt

$$m^*(E) \leq m^*(U_G) = \sum(b_n - a_n) \leq \frac{1}{R} \sum(f(b_n) - f(a_n)) \leq \frac{f(b) - f(a)}{R}.$$

De ongelijkheid $\sum(f(b_n) - f(a_n)) \leq f(b) - f(a)$ staat in lemma 5.9 bewezen. ∎

9.3. We bekijken nu de eerste manier om de stelling van Lebesgue voor continue functies te bewijzen. Het bewijs heeft alleen het lemma van de rijzende zon en de Lebesgue-buitenmaat nodig. We geven een kleine variant van het bewijs van Riesz omdat deze makkelijker te lezen is. Het bewijsidee komt volkomen met dat van Riesz overeen.

9.4 Bewijs via rijzende zon

We bewijzen eerst (7.2), dus dat E_∞ verwaarloosbaar is. Laat $K > 0$. Laat

$$E_K := \{x \in (a, b) : (D_r^+ f)(x) > K\}.$$

Er geldt $E_\infty \subset E_K \subset S_r(\Delta f > K)$ zodat met hulpstelling 9.2 volgt dat

$$m^*(E_\infty) \leq m^*(E_K) \leq \frac{f(b) - f(a)}{K}.$$

Neem nu de limiet $K \to \infty$.

Nu kijken we naar (7.1). Stel $m^*(E_{rR}) > 0$. Dan is er een $U \supset E_{rR}$ zodat $m^*(U) < \frac{R}{r} m^*(E_{rR})$. Schrijf $U = \bigcup I_n$, waar de I_n de componenten van U zijn. Bekijk nu een vaste I_n. Maak $G : \mathrm{clo}(-I_n) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(-x) + rx$. Door 8.2 op G toe te passen krijgen we $U_G = \bigcup_k (a_k, b_k)$ binnen I_n met

$$f(b_k) - f(a_k) \leq r(b_k - a_k).$$

Bekijk nu de functie $H(x) := f(x) - Rx \quad (x \in [a, b])$. We passen 8.2 toe op $H \restriction [a_k, b_k]$ voor elke k. Dat geeft componenten $U_{H \restriction [a_k, b_k]} = \bigcup_i (a_{ki}, b_{ki})$ binnen (a_k, b_k) met

$$R(b_{ki} - a_{ki}) \leq f(b_{ki}) - f(a_{ki}).$$

Maken we nu $U_n := \bigcup_{k,i} (a_{ki}, b_{ki})$ zien we met de disjunctheid van alle (a_{ki}, b_{ki}) en lemma 5.9 dat

$$m^*(U_n) = \sum_{k,i} (b_{ki} - a_{ki}) \tag{9.1}$$

$$\leq \frac{1}{R} \sum_{k,i} (f(b_{ki}) - f(a_{ki})) \leq \frac{1}{R} \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \tag{9.2}$$

$$\leq \frac{r}{R} \sum (b_k - a_k) \leq \frac{r}{R} m^*(I_n). \tag{9.3}$$

Er geldt verder

$$E_{rR} = E_{rR} \cap U = \bigcup_n E_{rR} \cap I_n,$$

en $E_{rR} \cap I_n \subset U_n$. Dat deze inclusie geldt (zie 9.5 voor details) kan je weer inzien met

$$E_{rR} \subset S_r(\Delta f > R) \cap S_l(\Delta f < r).$$

De vorige inclusie staat beschreven in lemma 6.9. Samen geeft dit

$$\begin{aligned} m^*(E_{rR}) &\leq \sum m^*(E_{rR} \cap I_n) \\ &\leq \sum m^*(U_n) \leq \frac{r}{R} \sum m^*(I_n) \\ &\leq \frac{r}{R} m^*(U) < m^*(E_{rR}). \end{aligned}$$

Dat is een tegenspraak, zodat $m^*(E_{rR}) = 0$ moet gelden. ■

9.5. Er zijn een paar opmerkingen over dit bewijs te maken. Voor een betere leesbaarheid heb ik de claim $E_{rR} \cap I_n \subset U_n$ niet meer expliciet bewezen. Omdat we soortgelijke uitspraken nog vaker tegen komen bewijs ik het hier:

Laat $x \in E_{rR} \cap I_n$. Dan geldt $x \in I_n$, een component van U. Zoals opgemerkt geldt verder $x \in S_r(\Delta f > R)$ en $x \in S_l(\Delta f < r)$. We willen laten zien dat er k en i bestaan met $x \in (a_{ki}, b_{ki})$. We bewijzen eerst de existentie van k. Met de openheid van I_n en $x \in S_l(\Delta f < r)$ vinden we een y in I_n met $y < x$ zodanig dat

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < r, \quad \text{ofwel} \quad f(y) - f(x) > r(y - x).$$

Als we in de oorsprong spiegelen hebben we $-x < -y$ in $-I_n$ met $G(-x) < G(-y)$ zodat $-x$ in een een of ander interval $(-b_k, -a_k)$ bevat is, dus: Er is een k met $x \in (a_k, b_k)$, per constructie van deze componenten. Nu is het makkelijk te zien, met $x \in S_r(\Delta f > R)$, dat er een i is met $x \in (a_{ki}, b_{ki})$. De subtiliteit ligt dus in het spiegelen in de oorsprong.

Een andere opmerking is dat dit bewijs een kleine verfijning van het bewijs van Riesz is. Hij werkt meteen in (a, b) zonder E_{rR} door een open verzameling U te omhullen, waarvan de maat niet veel van die van E_{rR} verschilt. Hij gebruikt het lemma van de rijzende zon oneindig vaak om collecties Σ_n van componenten te construeren zodat E_{rR} in $\cup\Sigma_n$ bevat is voor elke n én zodanig dat $m^*(\cup\Sigma_{2n}) \leq \left(\frac{r}{R}\right)^n m^*(\cup\Sigma_1) \leq \left(\frac{r}{R}\right)^n (b - a)$. Met $0 < r < R$ en de limiet $n \to \infty$ te nemen volgt hieruit ook dat $m^*(E_{rR}) = 0$.

Het enige verschil met ons bewijs is, dat we niet oneindig vaak het lemma van de rijzende zon hoeven toe te passen, omdat we meteen in een open verzameling werken, waarvan de maat niet te veel van die van E_{rR} verschilt.

9.6. Omdat de collectie der punten waar f niet continu is een aftelbare verzameling vormt (zie lemma 5.5) lijkt het voor de hand te liggen dat men het bewijs, zoals door Riesz gegeven, ook voor niet noodzakelijk continue functies kan aanpassen. Riesz zelf zegt het volgende :

> The modifications that have to be made in the previous reasoning in order to prove the lemma in this extended form and to apply it

to the case of discontinuous monotonic functions are so obvious that we shall omit the details.

Maar juist de overgang van het continue naar het discontinue geval is niet triviaal. Rubel vond de door Riesz voorgestelde uitbreiding niet zo eenvoudig en heeft om die reden in [1] uitgelegd hoe het beter kan. Om de moeilijkheid bij Riesz te zien bekijken we even hoe hij zijn lemma van de rijzende zon wilde uitbreiden:

9.7 Lemma (Rijzende zon, aangepast)**.** *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn zodat $f(x-)$ en $f(x+)$ voor iedere $x \in [a, b]$ bestaan.*[2] *In de randpunten nemen we de voor de hand liggende definities $f(a-) = f(a)$ en $f(b+) = f(b)$. Verder moet gelden*

$$x \in [a, b] \qquad \Rightarrow \qquad f(x-) \leq f(x) \leq f(x+).$$

Laat dan

$$U := \{x \in (a, b) : \textit{Er is een } y > x \textit{ met } g(y) > g(x+)\}.$$

Dan is U open en als (α, β) een component van U is geldt $g(\alpha+) \leq g(\beta+)$.

9.8. Dit lemma laat zich zonder problemen bewijzen. Het bewijs is in grove lijnen hetzelfde als bij 8.2. Een expliciet bewijs staat in [5, p. 29,30].

De uitvoering van het bewijs zoals Riesz het suggereert wordt in [5, p. 30, 31] gegeven. Het gaat helemaal analoog met de continue versie als we ons tot de punten beperken waar onze stijgende functie f continu is. Maar er treedt een onverwachte complicatie op. Deze wil ik kort schilderen. In de redenatie duikt de volgende ongelijkheid op:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f_k(\beta_{ki}+) - f_k(\alpha_{ki}+)) \leq f(\beta_k-) - f(\alpha_k+). \tag{9.4}$$

Deze is het analogon van formule (9.2). Hierbij is f_k de beperking van f tot $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a, b]$. Verder zijn de $(\alpha_{ki}, \beta_{ki})$ componenten van een open verzameling binnen (α_k, β_k).

Formule (9.4) hoeft niet noodzakelijk waar te zijn. Als namelijk f te β_k een sprong maakt en $\beta_{ki_0} = \beta_k$ voor zekere i_0 dan geldt $f(\beta_k-) < f(\beta_{ki_0}+)$. In dat geval is de som in (9.4) dus echt groter dan $f(\beta_k-) - f(\alpha_k+)$. De ongelijkheid klopt dus niet meer. In de daaropvolgende stap (zoals in formule (9.2)) moet

[2] Merk op: We hebben $f(x+)$ en $f(x-)$ alleen voor stijgende functies gedefinieerd. Voor een algemene definitie gebruiken we de beschrijving door linker- en rechterlimiet zoals in gevolg 5.4.

over k gesommeerd worden zodat we oneindig vaak een potentiële fout bij het resultaat optellen. Dus: Op die manier kunnen we het bewijs helaas niet voeren.

In [11, p. 71] beweert John von Neumann dat we zonder beperking der algemeenheid $f(\beta_k+)$ door $f(\beta_k-)$ mogen vervangen, als β_k gelijk is aan een zekere β_{ki_0}.

Nadat ik, zonder succes, probeerde te bewijzen, dat deze aanname gedaan mag worden, ben ik tot de conclusie gekomen dat de bewering van Von Neumann niet zonder nadere uitleg te verantwoorden is.

9.9 Definitie. Laat $A \subset \mathbb{R}$. We nomen $x \in A$ een **dichtheidspunt** [3] als

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r} m^*(A \cap (x-r, x+r)) = 1.$$

9.10 Stelling (Dichtheidsstelling van Lebesgue)**.** *Laat $A \subset \mathbb{R}$. Dan is bijna elke $x \in A$ een dichtheidspunt van A.*

9.11. Een bewijs bevindt zich in [5, p.194].

9.12 Gevolg. Laat $A \subset \mathbb{R}$. Als A geen dichtheidspunten heeft, dan is A verwaarloosbaar.

9.13 Bewijs via dichtheidspunten

We bewijzen nu dat E_{rR} verwaarloosbaar is door middel van dichtheidspunten en het lemma van de rijzende zon.

Maak weer $G(x) = f(-x) + rx$ op $[-b, -a]$. Passen we het lemma van de rijzende zon op G toe krijgen we weer $U_G = \bigcup (a_n, b_n)$ en

$$f(b_n) - f(a_n) \leq r(b_n - a_n).$$

Door nu $f_n := f \restriction [a_n, b_n]$ te bekijken zien we dat $E_{rR} \cap [a_n, b_n] \subset S_r(\Delta f_n > R)$, zodat we hulpstelling 9.2 op f_n kunnen toepassen. Dat geeft dan $m^*(E_{rR} \cap [a_n, b_n]) \leq \frac{f(b_n) - f(a_n)}{R}$. Met $E_{rR} \subset U_G$ zien we

$$\begin{aligned} m^*(E_{rR}) =& m^* \left(E_{rR} \cap \bigcup (a_n, b_n) \right) \\ &\leq \sum m^*(E_{rR} \cap [a_n, b_n]) \leq \frac{1}{R} \sum (f(b_n) - f(a_n)) \\ &\leq \frac{r}{R} \sum (b_n - a_n) \leq \frac{r}{R}(b-a). \end{aligned}$$

Laat nu $\epsilon > 0$ en $c \in [a, b]$. Bekijk dan $f \restriction [c-\epsilon, c+\epsilon]$. Door het vorige verhaal op deze beperkte functie toe te passen zien we dat $m^*(E_{rR} \cap [c-\epsilon, c+\epsilon]) \leq \frac{r}{R} 2\epsilon$.

[3] De notatie laat misschien aan adherentie en limietpunten van A denken, maar deze zijn hier **niet** bedoeld.

Dan geldt

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} m^*(E_{rR} \cap [c-\epsilon, c+\epsilon]) \leq \frac{r}{R} < 1.$$

E_{rR} kan dus geen dichtheidspunten hebben. Met gevolg 9.12 moet E_{rR} dus verwaarloosbaar zijn.

Het bewijs dat E_∞ verwaarloosbaar is kunnen we uit het bewijs van Riesz overnemen. ■

9.14. Het verschil met ons eerste bewijs is dat we, zoals Riesz, de verzameling E_{rR} niet eerst door een open verzameling benaderen. We krijgen dus een grovere afschatting voor de maat van E_{rR}, die wel genoeg is om te concluderen dat E_{rR} geen dichtheidspunten heeft.

10 Van continu naar discontinu

10.1. In deze sectie proberen wij de stelling van Lebesgue voor het continue geval naar het discontinue geval uit te breiden. „Discontinu" betekent hier dat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ niet meer noodzakelijk in ieder punt continu hoeft te zijn. Als fundament voor het volgende verhaal dient de volgende afgezwakte versie van de stelling van Lebesgue voor continue functies:

10.2 Stelling. *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een stijgende en continue functie. Dan is f' bijna overal gedefinieerd. In het bijzonder geldt dus voor bijna elke $x \in [a,b]$ dat $f'(x) \in [0,+\infty]$.*

10.3 Lemma (Lusin)**.** *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een willekeurige functie. Dan is de verzameling*

$$\{f(x) : f'(x) = 0\}$$

verwaarloosbaar. Dus als $Z = \{x : f'(x) = 0\}$, dan $m(f(Z)) = 0$.

10.4. Een bewijs bevindt zich in [5, p.154]. Het bewijs is elementair en maakt alleen gebruik van eenvoudige eigenschappen van meetbare verzamelingen.

10.5 Bewijs via de continue linksinverse

(I) Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een stijgende functie, niet noodzakelijk continu. Omdat $f(x) = (f(x)+x) - x$ kunnen we aannemen dat f strikt stijgend is en zelfs dat f de volgende eigenschap heeft:

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in [a,b], \\ x < y \end{array}\right] \Rightarrow f(y) - f(x) \geq y - x.$$

(II) Als $E \subset \mathbb{R}$ verwaarloosbaar is, dan is $f^{-1}(E)$ ook verwaarloosbaar. Dit zien we als volgt in:

Zij $\epsilon > 0$. Zoek open intervallen $I_n := (a_n, b_n)$ met

$$E \subset \bigcup I_n \qquad \text{en} \qquad \sum |I_n| < \epsilon.$$

Dan is

$$f^{-1}(E) \subset f^{-1}\left(\bigcup I_n\right) = \bigcup f^{-1}(I_n).$$

Gebruik makend van lemma 5.11 en de subadditiviteit van m^* concluderen wij

$$\begin{aligned} m^*(f^{-1}(E)) &\leq \sum m^*(f^{-1}(I_n)) = \sum m^*(f^{-1}((a_n, b_n))) \\ &\leq \sum m^*((a_n, b_n)) = \sum |I_n| < \epsilon. \end{aligned}$$

(III) We bewijzen nu dat $f'(x) \in [0, +\infty]$ voor bijna elke $x \in [a, b]$. Maak twee verzamelingen:

$$\begin{array}{lcl} y \in E & \Longleftrightarrow & y \in [f(a), f(b)] \text{ en } (f^{\leftarrow})'(y) \text{ is niet gedefinieerd}, \\ x \in D & \Longleftrightarrow & f \text{ is niet continu te } x. \end{array}$$

Volgens 5.8 is $f^{\leftarrow}$ continu en stijgend. Dus is E met stelling 10.2 verwaarloosbaar, zodat $f^{-1}(E)$ dat ook is; D is met lemma 5.5 verwaarloosbaar. Dus is $f^{-1}(E) \cup D$ verwaarloosbaar. Neem nu aan

$$x \in [a, b] \setminus \left(f^{-1}(E) \cup D\right).$$

We bewijzen dat $f'(x)$ gedefinieerd is, dus dat $f'(x) \in [0, +\infty]$. Door de keuze van x weten we dat als $x' \to x$ dan $f(x') \to f(x)$ en dat $(f^{\leftarrow})'(f(x)) \in [0, +\infty]$. Dan geldt

$$\begin{aligned} [0, +\infty] \ni (f^{\leftarrow})'(f(x)) &= \lim_{x' \to x} \frac{(f^{\leftarrow})(f(x)) - (f^{\leftarrow})(f(x'))}{f(x) - f(x')} \\ &= \lim_{x' \to x} \frac{x - x'}{f(x) - f(x')} \\ &= \left(\lim_{x' \to x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}\right)^{-1} \end{aligned}$$

We hebben dus bewezen

$$f'(x) \text{ is gedefinieerd en } f'(x) = \frac{1}{(f^{\leftarrow})'(f(x))} \in [0, +\infty].$$

Hierbij interpreteren we $1/\infty := 0$ en $1/0 := \infty$. We merken nog op dat $f(x) - f(x')$ altijd ongelijk aan nul is, voor $x' \neq x$, omdat f strikt stijgend is.

(IV) We moeten nog bewijzen dat $E_\infty = \{x \in [a,b] : f'(x) = +\infty\}$ verwaarloosbaar is. We geven hiervoor drie aanpakken. Het lemma van Lusin, een elementair bewijs met behulp van de stelling van Heine en Borel en het Vitali-lemma.

(V) **Aanpak 1: Lusin** We laten weer zien dat $E_\infty \setminus (f^{-1}(E) \cup D)$ verwaarloosbaar is. We bekijken nu dus een punt x met de volgende eigenschappen

- ⋆ $f'(x) = +\infty$.
- ⋆ $(f^{\leftarrow})'(f(x)) \in [0, +\infty]$.
- ⋆ f is continu te x.

We maken de verzameling

$$Z := \{y \in [f(a), f(b)] : (f^{\leftarrow})'(y) = 0\}.$$

Met lemma 10.3 is $f^{\leftarrow}(Z)$ verwaarloosbaar. We zijn dus klaar als $x \in f^{\leftarrow}(Z)$ dus als $x = f^{\leftarrow}(y)$ en zekere y met $(f^{\leftarrow})'(y) = 0$. Duidelijk werkt $y = f(x)$. Immers : $f^{\leftarrow}(y) = f^{\leftarrow}(f(x)) = x$. Verder mogen we de berekening van $(f^{\leftarrow})'(f(x))$ uit **(III)** copiëren. Dan staat er

$$(f^{\leftarrow})'(f(x)) = \left(\lim_{x' \to x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right)^{-1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Da laatste stap is formeel niet goed geformuleerd, maar inderdaad geldt dat het differentiequotiënt $(\Delta_x f)(x')$ willekeurig groot wordt, als $x \to x'$ omdat $f'(x) = \infty$. We zijn dus klaar.

(VI) **Aanpak 2: Heine en Borel** Laat $R > 0$ en

$$A_R := \left\{ x \in (a,b) \;\mid\; \exists l_x < x < r_x : \frac{f(r_x) - f(l_x)}{r_x - l_x} > R \right\}.$$

Dat A_R open is zie je met de definitie A_R: Gegeven een $x \in A_R$ zien we dat $(l_x, r_x) \subset A_R$. Dus

$$A_R = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n),$$

voor de componenten (α_n, β_n). Voor $n \in \mathbb{N}$ maak α_n', β_n' met

$$\beta_n' - \alpha_n' = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} \qquad \text{en} \qquad [\alpha_n', \beta_n'] \subset (\alpha_n, \beta_n).$$

Bekijk even een vaste $n \in \mathbb{N}$. Dan hebben we

$$[\alpha_n', \beta_n'] \subset \bigcup_{x \in [\alpha_n', \beta_n']} (l_x, r_x).$$

Met de stelling van Heine en Borel, of in topologische taal compactheid, vinden we dat

$$[\alpha_n', \beta_n'] \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} (l_{ni}, r_{ni}).$$

Het getal N_n kiezen we hierbij minimaal. Door deze keuze zie je makkelijk in dat ieder element van $[\alpha_n', \beta_n']$ in maximaal twee verschillende intervallen (l_{ni}, r_{ni}) en (l_{nj}, r_{nj}) bevat kan zijn. Als een punt in drie van zulke intervallen bevat is kan je nagaan dat een van de drie in de vereniging van de andere twee bevat is, wat in strijd met de minimaliteit van N_n is. We vatten samen:

$$\begin{aligned}
m(A_R) = \sum_n (\beta_n - \alpha_n) &\leq 2 \sum_n (\beta_n' - \alpha_n') \\
&\leq \sum_n \sum_{i=1}^{N_n} (r_{ni} - l_{ni}) \\
&\leq \frac{2}{R} \sum_n \sum_{i=1}^{N_n} (f(r_{ni}) - l(r_{ni})) \\
&\leq \frac{4}{R} \sum_n (f(\beta_n) - f(\alpha_n)) \\
&\leq \frac{4}{R} (f(b_n) - f(a_n)).
\end{aligned}$$

De afschatting

$$\sum_{i=1}^{N_n} (f(r_{ni} - l_{ni}) \leq 2(f(\beta_n) - f(\alpha_n))$$

krijg je vanwege het feit dat geen drie of meer intervallen elkaar kunnen snijden. Zie ook 5.10 voor meer informatie. We zien dus dat $m(A_R) = 0$. We zijn klaar als $E_\infty \subset A_R$ voor iedere $R > 0$. Dat zie je als volgt in: Voor gegeven $R > 0$ en $x \in E_\infty$ is er een δ-omgeving van x zodat

$$y \in (x - \delta, x + \delta) \qquad \Rightarrow \qquad (\Delta_x f)(y) > \frac{R}{2}.$$

Kies een vaste $0 < h < \delta$. Dan geldt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \frac{R}{2} \qquad \text{en} \qquad \frac{f(x) - f(x-h)}{h} > \frac{R}{2}$$

Optellen geeft

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > R.$$

Met $l_x = x - h$ en $r_x = x + h$ is $x \in A_R$.

(VII) Aanpak 3: Vitali We kunnen met het einde van de vorige aanpak beginnen: We maken een Vitali-overdekking van E_∞ als volgt: Voor $x \in E_\infty$ kunnen we, zoals net gezien, willekeurig kleine h vinden met

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > R.$$

Deze intervallen vormen een Vitali-overdekking voor E_∞. Laat $\epsilon > 0$. Met lemma 8.9 vinden we $h_1, \cdots, h_N$ en $x_1, \cdots, x_N$ zodat de intervallen $[x_n, x_n + h_n]$ onderling disjunct zijn en

$$m^*\left(\bigcup [x_n, x_n + h_n]\right) \geq m^*(E_\infty) - \epsilon.$$

Dat geeft

$$\begin{aligned} m^*(E_\infty) &\leq m^*\left(\bigcup [x_n, x_n + h_n]\right) + \epsilon \\ &= \left(\sum h_n\right) + \epsilon \\ &\leq \left(\frac{1}{R} \sum f(x_n + f_n) - f(x_n)\right) + \epsilon \\ &\leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{R}\right) + \epsilon. \end{aligned}$$

Neem eerst de limiet $\epsilon \downarrow 0$ en dan $R \to \infty$.

10.6. In 8.10 heb ik beloofd het lemma van de rijzende zon en het Vitali-lemma te vergelijken. Om die reden heb ik in het vorige bewijs de verschillende methodes gegeven om te bewijzen dat E_∞ verwaarloosbaar is. Om het lemma van de rijzende zon en Vitali direct met elkaar te kunnen vergelijken moeten we even aannemen dat onze functie continu is, omdat onze versie, zoals in 8.2, anders niet toepasbaar is.

(*i*) Voor Vitali nemen we intervallen $[x, x+h]$ met $(\Delta_x f)(x+h) > R$. Deze leveren met behulp van het Vitali-lemma een disjuncte overdekking van E_∞, waarvan de maat op ϵ na gelijk is aan de maat van E_∞.

(*ii*) Het lemma van de rijzende zon werkt soortgelijk: We maken de verzameling U_G met de functie $G(x) = f(x) - Rx$. Op die manier krijgen we een overdekking $E_\infty \subset U_G$ waar we op de componenten van U_G dezelfde ongelijkheid als bij Vitali hebben. Laat (α_n, β_n) een component van U_G zijn. Laat $h := \beta_n - \alpha_n$. Dan hebben we net als in (i) dat $(\Delta_\alpha f)(\alpha + h) > R$.

(*iii*) Ook de aanpak door Heine en Borel levert een aantal intervallen, waarop we een ongelijkheid zoals in (*i*) en (*ii*) hebben. Ook hier vormen de intervallen een overdekking die ons in staat stelt om de maat van E_∞ af te schatten.

In zekere zin zijn dat dus allemaal methodes om overdekkingen van een verzameling te vinden, zó dat op ieder interval in de overdekking een zekere ongelijkheid voor onze functie, ofwel de differentiequotiënt daarvan, geldt. Deze ongelijkheid wederom maakt het mogelijk de lokale groeieigenschap, gegeven door de verzamelingen E_∞ en E_{rR}, over te zetten naar het globaal gedrag. Grofweg kunnen we dus zeggen: *Door middel van overdekkingslemma's kunnen we uit het lokaal groeigedrag het globaal groeigedrag afleiden.* In 12.1 maken dat nog preciezer. We bekijken nu nog een andere methode, hoe we het continue geval kunnen uitbreiden.

10.7 Bewijs via sprongfuncties

In het volgende is $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend. We laten zien dat f te schrijven is als de som van een continue stijgende functie, en een sprongfunctie. Omdat we de stelling van Lebesgue al voor continue stijgende functies hebben bewezen, moeten we de stelling alleen nog voor een zekere sprongfunctie bewijzen. We zullen zien dat dit niet moeilijk is. Het verschil met de vorige aanpak, namelijk via de continue linksinverse $f^{\leftarrow}$, is, dat we nu de stelling van Lebesgue voor continue functies direct op f, i.p.v. $f^{\leftarrow}$, toepassen. In die zin ligt het wezenlijke probleem bij de uitbreiding van het continue geval dus in het feit dat (stijgende) sprongfuncties bijna overal differentieerbaar zijn.

10.8 Definitie. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een stijgende functie. We definiëren de oscillatie $\omega(f, x)$ van f te x door

$$\omega(f, x) := f(x+) - f(x-).$$

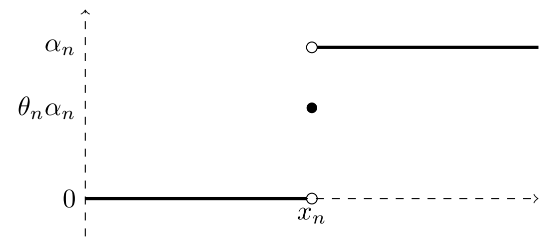
10.9 Definitie. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend. Laat $D = \{x_1, x_2, \cdots\}$ de verzameling der discontinuïteitspunten van f zijn (zie 5.5). Laat

$$\omega_n := \omega(f, x_n).$$

Met $f(x_n-) \leq f(x) \leq f(x_n+)$ is er dan een $\theta_n \in [0, 1]$ met $f(x_n) = f(x_n-) + \theta_n\omega_n$. Hiermee maken we functies $j_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ met

$$j_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x < x_n, \\ \theta_n & \text{als } x = x_n, \\ 1 & \text{als } x > x_n. \end{cases}$$

Als $x_n = a$ leggen we vast dat $j_n(a) = 0$ en $j_n(x) = 1$ voor $x > a$. Als $x_n = b$ dan laten we $j_n(b) = 1$ en $j_n(x) = 0$ voor $x < b$. Zie figuur 8 voor de grafiek van j_n.



Figuur 8: Grafiek van j_n

Merk op:

$$\sum \omega_n \leq f(b) - f(a) < \infty.$$

Vanwege de uniforme convergentie van $\sum \alpha_n j_n$ kunnen we dus de volgende functie maken:

$$J_f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n j_n(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

10.10 Lemma. *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stijgend. J_f heeft dan de volgende eigenschappen:*

(i) *J_f is stijgend.*

(ii) *J_f is precies in de punten x_n discontinu en $\omega(J_f, x_n) = \omega(f, x_n) = \omega_n$.*

(iii) *De functie $f - J_f$ is continu en stijgend.*

Bewijs. (i) Elke functie $x \mapsto \alpha_n j_n(x)$ is stijgend, dus is J_f stijgend.

(ii) Zij $c \in [a,b]$. Stel $c \neq x_n$ voor iedere n. Dan is iedere j_n continu te c, en dus is ook J_f continu te c, vanwege de uniforme convergentie.

Andersom: Als $c = x_N$ voor zekere N, dan bekijk

$$J_f(x) = \sum_{n=1}^{N} \omega_n j_n(x) + \sum_{n>N} \omega_n j_n(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

De rechter som is vanwege de uniforme convergentie continu te c. De linker som is eindig en heeft te $c = x_N$ duidelijk een sprong van grootte $\omega_N = \omega(f, x_N)$. Dus $\omega(J_f, c) = \omega(f, c)$.

(iii) Laat $y > x$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
J_f(y) - J_f(x) &= \sum_{y \geq x_n} \omega_n j_n(y) - \sum_{x \geq x_n} \omega_n j_n(x) \\
&\leq \sum_{x_n < y} \omega_n - \sum_{x_n \leq x} \omega_n \\
&= \sum_{x < x_n < y} \omega_n \leq f(y) - f(x).
\end{aligned}$$

Er geldt dus $f(x) - J_f(x) \leq f(y) - J_f(y)$ zodat $f - J_f$ stijgend is.

We bewijzen nu dat $f - J_f$ continu is. Als $x \notin \{x_1, x_2, \cdots\}$ dan geldt volgens (i) dat $\omega(f, x) = \omega(J_f, x) = 0$, dus ook $\omega(f - J_f, x) = 0$. Als $x = x_N$, voor zekere N, dan zien we ook met (i) dat

$$\omega(f - J_f, x_N) = \omega(f, x_N) - \omega(J_f, x_N) = \omega(f, x_N) - \omega(f, x_N) = 0.$$

In elk geval is de oscillatie van $f - J_f$ te x gelijk aan 0, zodat $f - J_f$ continu is.

■

10.11 Stelling. *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend zijn. Dan is J_f bijna overal differentieerbaar, met $J_f'(x) = 0$, bijna overal.*

Bewijs. We moeten laten zien dat J_f bijna overal differentieerbaar is, met als afgeleide 0. Schrijf in het volgende J voor J_f. We merken op dat we klaar zijn als voor iedere $R > 0$ de verzameling $E := (D_r^+ J)^{-1}((R, \infty)) = \{x \in (a, b) : (D_r^+ J)(x) > R\}$ verwaarloosbaar is. We hebben dan namelijk

$$0 \leq D_r^- J \leq D_r^+ J \leq 0,$$

bijna overal. Door de functie $x \mapsto -J(-x)$ ($x \in [-b, -a]$) te bekijken krijgen we net zo

$$0 \leq D_l^- J \leq D_l^+ J \leq 0,$$

bijna overal. Dus bijna overal zijn dan alle vier Diniafgeleides gelijk aan 0, en onze bewering is bewezen.

Laat dus $R > 0$ en bekijk $E := \{x \in (a, b) : (D_r^+ J)(x) > R\}$. We merken op dat

$$\sum \omega_n < \infty.$$

Laat $\epsilon > 0$. Dan is er een N met $\sum_{n \geq N} \omega_n < \epsilon$. Laat $J_0 := \sum_{n \geq N} \omega_n j_n$. Dan geldt

$$J_0(b) - J_0(a) \leq \sum_{n \geq N} \omega_n < \epsilon.$$

Laat $\hat{E} := E \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}\}$. Er geldt

$$x \in \hat{E} \qquad \Rightarrow \qquad (D_r^+ J_0)(x) > R.$$

Voor $x \in \hat{E}$ zijn er dan intervallen $[x, x+h] \subset (a,b)$, voor willekeurig kleine $h > 0$, zodanig dat

$$J_0(x+h) - J_0(x) > Rh.$$

Deze intervallen vormen een Vitali-overdekking van $\hat{E}$, zodat we een disjuncte deelcollectie $\{[x_1, x_1+h_1], \cdots, [x_K, x_K+h_K]\}$ kunnen vinden met

$$\sum_{k=1}^{K} h_k \geq m^*(\hat{E}) - \frac{\epsilon}{R}.$$

Dat geeft

$$\begin{aligned} 0 \leq Rm(E) = Rm(\hat{E}) \leq R\left(\sum_{k=1}^{K} h_k + \frac{\epsilon}{R}\right) &= R\sum_{k=1}^{K} h_k + \epsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{K}(J_0(x_k+h_k) - J_0(x_k)) + \epsilon \leq J_0(b) - J_0(a) + \epsilon \\ &\leq \sum_{n \geq N} \omega_n + \epsilon < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Neem nu de limiet $\epsilon \downarrow 0$. Dan geldt $0 \leq Rm(E) \leq 0$. Met $R > 0$ moet dus gelden $m(E) = 0$. ∎

10.12. Het overdekkingsargument heb ik nu door middel van het Vitali-lemma bewezen. Maar, als je dat niet wilt gebruiken, kunnen we het bewijs eenvoudig aanpassen: We kunnen ook aannemen dat $\limsup_{h\to 0}(\Delta_x h)(x+h) > \epsilon$ voor $x \in \hat{E}$. Merk op dat volgens 6.12 geldt dat E meetbaar is. Dan ook $\hat{E}$. We kunnen dus, volgens stelling 2.12, een compacte $K \subset \hat{E}$ vinden met $m(K) \geq m(\hat{E})/2$. Maar nu kunnen we intervallen (a_x, b_x) voor $x \in K$ vinden met

$$\frac{J_0(b_x) - J_0(a_x)}{b_x - a_x} > R.$$

Pas nu Heine-Borel toe en neem een overdekking van K met zo min mogelijk elementen. Dat betekent dat niet meer dan twee van de zo gevonden intervallen $(a_1, b_1), \cdots, (a_K, b_K)$ elkaar snijden. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} 0 \leq Rm(E) \leq Rm(\hat{E}) \leq 2Rm(K) &\leq 2R\sum(b_k - a_k) \\ &\leq 2\sum(J_0(b_k) - J_0(a_k)) \leq 4(J_0(b) - J_0(a)) < 4\epsilon. \end{aligned}$$

Blijkbaar is E verwaarloosbaar.

Een andere methode is nog te vinden in [2], die de variatie van J_f beschouwt, maar in grove lijnen hetzelfde idee als hierboven volgt.

11 Het algemene geval

11.1. Het volgende bewijs berust op het bewijs van Royden zoals in [9, p. 100-103]. Het eerste deel van het bewijs heeft het Vitali-lemma (zie 8.9) nodig en elementaire feiten van de Lebesgue-buitenmaat. Om (7.1) ($m(E_{rR}) = 0$) te bewijzen hebben we dus alleen elementaire analyse nodig. Om (7.2) ($m(E_\infty) = 0$) te bewijzen maakt Royden gebruik van meetbaar- en integreerbaarheid. Uit dit bewijs krijgen we nog een nuttige afschatting als cadeau. Deze aanpak leeft dus in een andere sfeer dan de methodes **(V)**-**(VII)** in 10.5, omdat deze geen gebruik van integratietheorie maken.

11.2 Bewijs via Vitali-overdekking

(I) We beginnen met (7.1) en maken twee Vitali-overdekkingen van E_{rR}. Laat $\epsilon > 0$. E_{rR} is begrensd zodat we een open verzameling $O \supset E_{rR}$ kunnen vinden met $m^*(O) < m^*(E_{rR}) + \epsilon$.

(II) Laat $x \in E_{rR}$. Met $E_{rR} \subset S_l(\Delta f < r)$ bestaan er willekeurig kleine $h > 0$ zodat $[x - h, x]$ in O bevat is en

$$f(x) - f(x-h) < rh.$$

Met het Vitali-lemma kunnen we van deze intervallen een disjuncte deelcollectie $\{I_1, \cdots, I_N\}$ vinden met

$$m^*\left(E_{rR} \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \frac{\epsilon}{R}.$$

Schrijf $I_n = [x_n - h_n, x_n]$ voor $n \in \underline{N}$. Dan geldt

$$\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - f(x_n - h_n)) < r\sum_{n=1}^{N} h_n \leq rm^*(O) < r(m^*(E_{rR}) + \epsilon). \tag{11.1}$$

Bekijk nu een vaste $n \in \underline{N}$. Stel $y \in \operatorname{int}(I_n) \cap E_{rR}$. Dan kunnen we met $E_{rR} \subset S_r(\Delta f > R)$ intervallen $[y, y+t] \subset \operatorname{int}(I_n)$ vinden met $t > 0$ willekeurig klein en zodanig dat

$$f(y+t) - f(y) > Rt.$$

Deze intervallen vormen een Vitali-overdekking van $\operatorname{int}(I_n) \cap E_{rR}$. We vinden hieruit disjuncte $J_1^{(n)}, \cdots, J_{N_n}^{(n)}$ met

$$m^*\left((I_n \cap E_{rR}) \setminus \bigcup_{k=1}^{N_n} J_k^{(n)}\right) = m^*\left((\operatorname{int}(I_n) \cap E_{rR}) \setminus \bigcup_{k=1}^{N_n} J_k^{(n)}\right) < \frac{\epsilon}{NR}.$$

(III) Schrijf $J_k^{(n)} = [y_k^{(n)}, y_k^{(n)} + t_k^{(n)}]$ voor $k \in \underline{N_n}$. Voor $n \in \underline{N}$ geldt

$$\sum_{k=1}^{N_n} t_k^{(n)} = m^* \left(\bigcup_{k=1}^{N_n} J_k^{(n)} \right) > m^*(I_n \cap E_{rR}) - \frac{\epsilon}{NR}.$$

Hiermee zien we

$$\sum_{k=1}^{N_n} \left(f(y_k^{(n)} + t_k^{(n)}) - f(t_k^{(n)}) \right) > R \sum_{k=1}^{N_n} t_k^{(n)} > Rm^*(I_n \cap E_{rR}) - \epsilon/N. \quad (11.2)$$

Merk even op dat

$$m^* \left(E_{rR} \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) \geq m^*(E_{rR}) - m^* \left(E_{rR} \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) > m^*(E_{rR}) - \epsilon/R.$$

We sommeren nu alle termen in (11.2):

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} \left(f(y_k^{(n)} + t_k^{(n)}) - f(t_k^{(n)}) \right) > \left(R \sum_{n=1}^{N} m^*(I_n \cap E_{rR}) \right) - \epsilon$$
$$\geq Rm^* \left(E_{rR} \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) - \epsilon > Rm^*(E_{rR}) - \epsilon - \epsilon = Rm^*(E_{rR}) - 2\epsilon.$$

We hebben dus gevonden:

$$Rm^*(E_{rR}) - 2\epsilon < \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} \left(f(y_k^{(n)} + t_k^{(n)}) - f(t_k^{(n)}) \right). \quad (11.3)$$

De intervallen $J_k^{(n)}$ zijn onderling disjunct en bevat in I_n. Met lemma 5.9 volgt dus:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} \left(f(y_k^{(n)} + t_k^{(n)}) - f(t_k^{(n)}) \right) \leq \sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - f(x_n - h_n) \right).$$

Samen met formule (11.1) en (11.2) geeft dat

$$Rm^*(E_{rR}) - 2\epsilon < \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} \left(f(y_k^{(n)} + t_k^{(n)}) - f(t_k^{(n)}) \right) < r(m^*(E_{rR}) + \epsilon) \quad (11.4)$$

Neem nu de limiet $\epsilon \downarrow 0$. Dan zien we $Rm^*(E_{rR}) \leq rm^*(E_{rR})$. Omdat $0 < r < R$ kan dat alleen als $m^*(E_{rR}) = 0$.

(IV) Zij g de bijna overal gedefinieerde functie f'. Maak

$$g_n(x) := \begin{cases} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) & \text{als } x + \frac{1}{n} \in [a, b], \\ b & \text{anders.} \end{cases}$$

Dan geldt $g_n \to g$, bijna overal, zodat g meetbaar is. Omdat alle g_n-en niet-negatief zijn volgt met het lemma van Fatou (zie 13.3) dat

$$\begin{aligned}\int_a^b g \le \liminf \int_a^b g_n &= \liminf n \int_a^b f(x+1/n) - f(x)\, dx \\ &= \liminf \left[n \int_b^{b+1/n} f - n \int_a^{a+1/n} f \right] \\ &= \liminf \left[f(b) - n \int_a^{a+1/n} f \right] \\ &\le f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Omdat de (Lebesgue) integraal eindig is, volgt dat g bijna overal eindig is. We hebben dus bewezen dat E_∞ verwaarloosbaar is.

11.3 Lemma. *We houden vast: Als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stijgend is dan is de bijna overal gedefinieerde functie f' meetbaar en*

$$\int_a^b f' \le f(b) - f(a).$$

11.4. Het eerste deel van het vorige bewijs lijkt wat omslachtig. Maar in feite gebeurt er niet meer dan een paar handige keuzes te maken, zodat het eindresultaat enigszins goed uitkomt. Een soortgelijke aanpak, alleen op E_∞ toegepast, hebben we al in 10.5 gezien. Alleen dat we nu het bewijsidee van Riesz gebruiken: Maak eerst intervallen I_n waarvan de totale lengte ongeveer gelijk is aan de maat van E_{rR} en vervolgens maak voor iedere n intervallen $J_k^{(n)}$ waarvan de totale lengte ongeveer gelijk is aan die van I_n. Met „ongeveer" bedoelen we natuurlijk „op ϵ na".

Een andere opmerking heeft met formule (11.4) te doen. We zien hier een mooie afschatting. Als we ϵ even vergeten staat er

$$Rm^*(E_{rR}) < (?) < rm^*(E_{rR}).$$

We bekijken wat (?) is: Voor het gemak nemen we aan dat f strikt stijgend is. Omdat de intervallen I_n en $J_k^{(n)}$ allemaal disjunct zijn, is (?) dan gelijk aan $m^*(A)$, waarbij

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{N_n} J_k^{(n)}.$$

Maar we hebben net gezien, dat $m^*(A)$ ongeveer gelijk is aan $m^*(E_{rR})$. Dus op ϵ na krijgen we een ongelijkheid van de volgende soort:

$$Rm^*(E_{rR}) \le m^*(f(E_{rR})) \le rm^*(E_{rR}).$$

Dat is een uiteraard mooie observatie: Op de verzameling E_{rR} hebben we informatie (via de Diniafgeleides) over het lokale groeigedrag van f. Blijkbaar kunnen we hiermee iets over het globale groeigedrag afleiden. Dus: De maat van het beeld van E_{rR} wordt bepaald door het gedrag van de Diniafgeleides op E_{rR}.

In het volgende hoofdstuk maken we dit heuristisch verhaal nog wat preciezer, omdat hierin, volgens mij, de essentie van het probleem ligt.

12 Groei van monotone functies

Zoals in het vorige hoofdstuk beweerd houden we ons nu met het groeigedrag van monotone functies bezig. We maken dus een verband tussen de maat van een verzameling E en de maat van de verzameling $f(E)$, gegeven dat op E zekere lokale eigenschappen voor f gelden:

12.1 Lemma. *Stel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is strikt stijgend. Laat $E \subset [a,b]$. Voor een Diniafgeleide Df geldt dan:*

$$Df > R \text{ op } E \qquad \Rightarrow \qquad m^*(f(E)) \geq Rm^*(E),$$

$$Df < r \text{ op } E \qquad \Rightarrow \qquad m^*(f(E)) \leq rm^*(E).$$

*In het volgende zullen we dit ook het **groeilemma** noemen.*

12.2 Discontinu geval via groeilemma

Hiermee kunnen we eenvoudig de stelling van Lebesgue voor strikt stijgende functies bewijzen. Nemen we voor $E = E_{rR}$ dan geldt dus

$$rm^*(E_{rR}) \geq m^*(f(E_{rR})) \geq Rm^*(E_{rR}).$$

Dat kan alleen als $m^*(E_{rR}) = 0$ zodat we (7.1) hebben bewezen. Net zo zie je door $E = E_\infty$ te nemen dat $m^*(f(E_\infty)) \geq Rm^*(E_\infty)$ voor elke $R > 0$. Dus

$$m^*(E_\infty) \leq \frac{1}{R} m^*(f(E_\infty)) \leq \frac{f(b) - f(a)}{R}.$$

De algemene stelling van Lebesgue, zoals in 7.1 geformuleerd, laat zich dan bewijzen door op te merken dat $f(x) = (f(x) + x) - x$.

12.3 Groeilemma via Vitali-overdekkingen

We bekijken in het volgende hoe we lemma 12.1 door middel van het Vitali-lemma en het lemma van de rijzende zon kunnen bewijzen. We beginnen met het Vitali-lemma om bij het verhaal uit 11.4 aan te sluiten:

Bewijs. **(I)** Stel eerst dat $(D_l^- f)(x) < r$ op E. Laat $\epsilon > 0$ en zij O een open verzameling met $O \supset E$ en $m^*(O) < m^*(E) + \epsilon$.

Laat $x \in E$. Dan is er een rij $h_n > 0$ met $h_n \to 0$ zodat

$$[x - h_n, x] \subset O \qquad \text{en} \qquad \frac{f(x) - f(x - h_n)}{h_n} < r. \tag{12.1}$$

Laat $I_n(x) := [x - h_n, x]$ en $J_n(x) := [f(x - h_n), f(x)]$. We merken op dat de rij (h_n) van x afhangt, maar voor de eenvoudigheid schrijven we dat niet expliciet erbij. Per constructie geldt nu voor elke $x \in E$ dat $m^*(J_n(x)) < rm^*(I_n(x))$ waar $m^*(I_n(x)) = h_n \to 0$. Maken we $\mathcal{J} := \{J_n(x) : x \in E \text{ en } n \in \mathbb{N}\}$ dan zien we dus dat $\mathcal{J}$ een Vitali-overdekking van $f(E)$ is. Met lemma 8.9 vinden we dan $x_1, \cdots, x_N \in E$ en $n_1, \cdots, n_N \in \mathbb{N}$ met

$$m^* \left(f(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{N} J_{n_i}(x_i) \right) < \epsilon,$$

waarbij de zo gevonden $J_{n_i}(x_i)$ onderling disjunct zijn. Ervan gebruik makend dat f strikt stijgend is geldt dan

$$\begin{aligned}
m^*(f(E)) &< m^* \left(\bigcup_{i=1}^{N} J_{n_i}(x_i) \right) + \epsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} m^*(J_{n_i}(x_i)) + \epsilon \leq r \sum_{i=1}^{N} m^*(I_{n_i}(x_i)) + \epsilon \\
&= rm^* \left(\bigcup_{i=1}^{N} I_{n_i}(x_i) \right) + \epsilon \leq rm^*(O) + \epsilon < r(m^*(E) + \epsilon) + \epsilon \\
&= rm^*(E) + r(\epsilon + 1).
\end{aligned}$$

Dus $m^*(f(E)) \leq rm^*(E)$ als we de limiet $\epsilon \downarrow 0$ nemen.

(II) Stel nu dat $D_r^+ f > R$ op E. We nemen **voorlopig** aan dat f te x continu is als $x \in E$. Laat $\epsilon > 0$ en zij V een open verzameling met $V \supset f(E)$ en $m^*(V) < m^*(f(E)) + \epsilon$.

Laat $x \in E$. Omdat f te x continu is kunnen we een open interval $I_x \ni x$ vinden zodat $f(I_x) \subset V$. Nu is er een rij (h_n) met $h_n \downarrow 0$ zodanig dat

$$[x, x + h_n] \subset I_x \qquad \text{en} \qquad \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} > R.$$

We maken weer $I_n(x) := [x, x + h_n]$ en $J_n(x) := [f(x), f(x + h_n)]$. Dan geldt dus $m^*(J_n(x)) > Rm^*(I_n(x))$. Omdat $h_n \to 0$ is $\mathcal{I} := \{I_n(x) : x \in$

E en $n \in \mathbb{N}\}$ een Vitali-overdekking van E. We vinden dus $x_1, \cdots, x_N \in E$ en $n_1, \cdots, n_N \in \mathbb{N}$ met

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_{n_i}(x_i)\right) < \epsilon.$$

Analoog met **(I)** krijgen we

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) > m^*(V) - \epsilon \geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{N} J_{n_i}(x_i)\right) - \epsilon \\ = \sum_{i=1}^{N} m^*(J_{n_i}(x_i)) - \epsilon > R\sum_{i=1}^{N} m^*(I_{n_i}(x_i)) - \epsilon \\ = Rm^*\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_{n_i}(x_i)\right) - \epsilon \\ > R(m^*(E) - \epsilon) - \epsilon = Rm^*(E) - \epsilon(R+1). \end{aligned}$$

Door weer de limiet $\epsilon \downarrow 0$ te nemen zien we $m^*(f(E)) \geq Rm^*(E)$.

(III) De aanname in **(II)**, namelijk dat f te $x \in E$ continu is, kunnen we makkelijk kwijt raken. Laat C de verzameling der punten zijn waar f continu is. Volgens lemma 5.5 geldt dan dat $E \setminus C$ verwaarloosbaar is. Hieruit volgt

$$Rm^*(E) = Rm^*(E \cap C) \leq m^*(f(E \cap C)) \leq m^*(f(E)).$$

(IV) We hebben ons nu tot $D_l^- f$ en $D_r^+ f$ beperkt. Uit lemma 6.9 volgt meteen dat **(I)** ook met $D_l^+ f$ werkt en **(II)** met $D_r^- f$.

(V) Zoals gewoonlijk kunnen we onze kennis over de linker Diniafgeleides door $g(x) := -f(-x)$ $(x \in [-b, -a])$ op de rechter Diniafgeleides overbrengen. Voor $x \in [-b, -a]$ weten we

$$(D_r^+ f)(-x) = (D_l^+ g)(x) \qquad \text{en} \qquad (D_r^- f)(-x) = (D_l^- g)(x).$$

We kunnen **(I)** dus op g toepassen. Als $D_r^+ f < r$ op E dan $D_l^+ g < r$ op $-E$ zodat

$$m^*(g(-E)) = m^*(-f(E)) = m^*(f(E)) \leq rm^*(-E) = rm^*(E).$$

Net zo krijgen we de gezochte ongelijkheid als $D_r^- f < r$ op E . Het bewijs voor het geval $D_l^- f > R$ op E en $D_l^+ f > R$ op E is nu duidelijk.

■

12.4. We zien dat het bewijsidee hetzelfde is als bij 11.2, waar we het discontinue geval adhoc via het Vitali-lemma bewijzen. De winst is, dat we nu het bewijs op een hoger niveau van abstractie voeren, wat ervoor zorgt dat het bewijs van het groeilemma veel eenvoudiger te lezen en te begrijpen is.

12.5 Groeilemma via rijzende zon

We bewijzen nu het groeilemma via het lemma van de rijzende zon. Dit bewijs gebruikt ook het idee van Rubel, dat we in 10.5 al uitvoerig hebben gezien. In essentie loopt het onderstaande bewijs op dezelfde manier af als bij Faure in [7], alleen dat ons groeilemma een iets algemenere uitspraak doet dan de lemma's zoals zij bij Faure te vinden zijn.

Bewijs. **(I)** Stel eerst dat f continu en strikt stijgend is. Stel $x \in E \Rightarrow (D_l^+ f)(x) > R$. We bewijzen dat $m^*(f(E)) \geq Rm^*(E)$.

Laat hiervoor $V \supset f(E)$ open zijn met $m^*(V) < m^*(f(E)) + \epsilon$. Laat $U := f^{-1}(V) \cap (a, b)$. Dat is een open verzameling. Passen we lemma 8.4 op U en de functie $G(x) = f(x) - Rx$ toe krijgen we

$$U_G = \bigcup_n (a_n, b_n) \qquad \text{met} \qquad R(b_n - a_n) \leq f(b_n) - f(a_n).$$

Er geldt $E \subset U_G$ zodat

$$\begin{aligned} Rm^*(E) \leq Rm^*(U_G) = R\sum_n (b_n - a_n) &\leq \sum_n (f(b_n) - f(a_n)) \\ &= m^*\left(\bigcup (f(a_n), f(b_n))\right) \leq m^*\left(\bigcup f((a_n, b_n))\right) \\ &= m^*(f(U_G)) \leq m^*(V) < m^*(f(E)) + \epsilon. \end{aligned}$$

De ongelijkheid in de tweede regel geldt omdat $f \restriction [a_n, b_n]$ continu is. Hieruit volgt namelijk dat $[f(a_n), f(b_n)] \subset f([a_n, b_n])$.

(II) Om te concluderen dat $E \subset U_G$ hadden we volgens lemma 6.9 in **(I)** ook kunnen aannemen dat $(D_l^- f)(x) > R$ op E.

Als we dan **(I)** op de functie $x \mapsto -f(-x) \quad (x \in [-b, -a])$ toepassen krijgen we de corresponderende uitspraken voor $D_r^- f$ en $D_r^+ f$. We hebben dus lemma 12.1 voor continue en stijgende functies bewezen.

(III) Stel nu dat f strikt stijgend is en $x \in E \Rightarrow (D_l^- f)(x) < r$. We bewijzen dat $m^*(f(E)) \leq rm^*(E)$.

Laat D de collectie der punten zijn waar f niet continu is. Laat $x \in E \setminus D$. Zij $\epsilon > 0$ zodanig dat $(D_l^- f)(x) < r - \epsilon < r$. Dan vinden we een rij x_n in

(a, b) met $x_n \uparrow x$ en

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} < r - \epsilon, \text{ dus } \frac{x - x_n}{f(x) - f(x_n)} > \frac{1}{r - \epsilon}.$$

Omdat f strikt stijgend en continu te x is geldt

$$f(x_n) \uparrow f(x) \qquad \text{en} \qquad \frac{f^{\leftarrow}(f(x)) - f^{\leftarrow}(f(x_n))}{f(x) - f(x_n)} > \frac{1}{r - \epsilon}.$$

Dat betekent $(D_l^+ f^{\leftarrow})(f(x)) \geq \frac{1}{r-\epsilon} > \frac{1}{r}$. Passen we **(I)** en **(II)** op $f^{\leftarrow}$ toe ($f^{\leftarrow}$ is continu en stijgend volgens 5.8) zien we $m^*(f^{\leftarrow}(f(E \setminus D))) \geq \frac{1}{r} m^*(f(E \setminus D))$. Dus

$$m^*(E) \geq m^*(E \setminus D) \geq \frac{1}{r} m^*(f(E \setminus D)) = \frac{1}{r} m^*(f(E)),$$

omdat $m^*(f(D)) = 0$.

(IV) Met dezelfde redenatie als in **(II)** kunnen we **(III)** voor iedere van de vier Diniafgeleides bewijzen.

(V) Stel weer dat f strikt stijgend is en $x \in E \Rightarrow (D_r^+ f)(x) > R$. We bewijzen dat $m^*(f(E)) \geq R m^*(E)$. Dit werkt precies zoals in **(III)**.

Laat $x \in E \setminus D$ en $\epsilon > 0$ zodanig dat $(D_r^+ f)(x) > R + \epsilon > R$. Dan is er een rij (x_n) in (a, b) met $x_n \downarrow x$ en

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} > R + \epsilon, \text{ dus } \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} < \frac{1}{R + \epsilon}.$$

Dan geldt

$$f(x_n) \downarrow f(x) \qquad \text{en} \qquad \frac{f^{\leftarrow}(f(x_n)) - f^{\leftarrow}(f(x))}{f(x_n) - f(x)} < \frac{1}{R + \epsilon}.$$

Dus $(D_r^- f^{\leftarrow})(f(x)) \leq \frac{1}{R+\epsilon} < \frac{1}{R}$. Door **(III)** en**(IV)** op $f^{\leftarrow}$ toe te passen krijgen we $m^*(f^{\leftarrow}(f(E \setminus D)) \leq \frac{1}{R} m^*(f(E \setminus D))$. Dat geeft

$$m^*(E) = m^*(E \setminus D) \leq \frac{1}{R} m^*(f(E \setminus D)) \leq \frac{1}{R} m^*(f(E)).$$

(VI) Ook **(V)** werkt voor iedere Diniafgeleide. We hebben dus lemma 12.1 bewezen.

■

12.6. Om **(I)** te bewijzen hebben we niet eens nodig dat f stijgend is. Deze eis hebben we pas nodig om te concluderen dat $f^{\leftarrow}$ een continue en stijgende linksinverse is, als f strikt stijgend is.

12.7. We hebben nu enkele bewijsmethodes gezien. De keuze van het Vitali-lemma en het lemma van de rijzende zon berust op persoonlijke voorkeur, en het feit dat deze twee lemma's (en de stelling van Heine en Borel) krachtige hulpmiddelen zijn om de stelling te bewijzen. Verder vereisen deze methodes geen ingewikkelde hulpmiddelen.

Een hier niet beschreven methode is bijvoorbeeld de functie f door een homeomorfisme te benaderen. Door het gebruik van eigenschappen van meetbare verzamelingen kunnen we door middel van dit homeomorfisme ook het groeilemma 12.1 bewijzen. Een andere methode om het groeilemma te bewijzen is in [8] te vinden. Hier voert Hagood een nieuwe soort van overdekkingen in, die het idee van Vitali-overdekkingen gebruikt. Met deze methode kunnen we dan compacte verzamelingen door niet-overlappende intervallen overdekken waarop we dan weer een afschatting voor de differentiequotiënt hebben. Hiermee laat zich bijvoorbeeld ook stelling 10.11 („sprongfuncties zijn bijna overal differentieerbaar") eenvoudig bewijzen.

Ter afsluiting van onze discussie zullen we nog naar een belangrijke toepassingen van de stelling van Lebesgue kijken.

13 Toepassing: Van Riemann naar Lebesgue

We hebben ons nu intensief met de stelling van Lebesgue bezig gehouden. In dit hoofdstuk zullen we zien dat het de moeite waard is om de stelling, en de nodige hulpmiddelen, goed te begrijpen. Het doel van deze sectie is de volgende stelling te bewijzen:

13.1 Stelling. *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie. Dan is f absoluut continu dan en slechts dan als f een onbepaalde integraal van een Lebesgue-integreerbare functie is.*

In dat geval is f bijna overal differentieerbaar , f' is Lebesgue-integreerbaar en f is een onbepaalde integraal van f'.

13.2. We gebruiken hier nieuwe begrippen, die we in het volgende zullen uitleggen. Grofweg willen we het volgende voor absoluut continue functies bewijzen:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f',$$

waarbij we met de Lebesgue-integraal werken. Merk op dat we in de wereld van Lebesgue-integratie aan continuïteit niet meer genoeg hebben. De Cantorfunctie ϕ voldoet aan $\int_0^1 \phi' = 0$ maar $\phi(1) - \phi(0) = 1$, hoewel ϕ continu is.

Het bewijs van de stelling is niet triviaal, en het onderliggende probleem is ten eerste de stelling van Lebesgue te bewijzen en ten tweede te definiëren wat absoluut continue functies, en functies van begrensde variatie zijn. Hiermee kunnen we dit analogon van de hoofdstelling van de calculus in termen van Lebesgue-integratie bewijzen. Voordat we aan de slag gaan, herhaal ik de meest belangrijke feiten over Lebesgue-integratie van functies op een gesloten interval $[a, b]$.

13.3 Lebesgue-integratie: Intermezzo

De theorie van de Lebesgue-integratie wordt in [5] uitvoerig uitgelegd. Ik zal me dus alleen tot resultaten en notaties beperken.

De ruimte der Lebesgue-integreerbare functies op $[a, b]$ noteren wij met $\mathcal{L}[a, b]$. Om het makkelijk te houden, zullen we deze functies **integreerbaar** noemen. We kunnen $\mathcal{L}[a, b]$ als volgt beschrijven:

$$f \in \mathcal{L}[a, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \exists \phi_1, \phi_2, \dots \in C[a, b] \text{ met} \\ \sum \int |\phi_i| < \infty \;\text{ en }\; \sum \phi_i = f, \text{ bijna overal.} \end{array} \right.$$

Je kan dan laten zien dat $\sum \int \phi_i$ bestaat, en niet van de ϕ_i afhangt. We definiëren dan de Lebesgue-integraal $\int f$ van f door

$$\int f = \int_a^b f := \sum \int \phi_i.$$

Merk op dat we voor $\int \phi_i$ natuurlijk de Riemann-integraal gebruiken. Verder is iedere Riemann-integreerbare functie Lebesgue-integreerbaar en de integralen komen overeen. We merken ook nog op dat integreerbare functies meetbaar (in de zin van Lebesgue) zijn.

Belangrijke stellingen binnen deze theorie zijn de volgende:

(1) Monotone convergentie, of ook de stelling van Levi.

(2) Het lemma van Fatou.

(3) De gedomineerde convergentie.

We bekijken even wat deze stellingen precies inhouden:

(1) **Levi**: Stel (f_n) is een rij in $\mathcal{L}[a, b]$ is met $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, bijna overal en $f = \lim_n f_n$, bijna overal. Als de rij der getallen $\int f_n$ begrensd is, dan geldt $f \in \mathcal{L}[a, b]$ en
$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

(2) **Fatou**: Stel (f_n) is een rij in $\mathcal{L}[a,b]$ met $f_n \geq 0$, bijna overal. Stel $f = \liminf_n f_n$, bijna overal. Als de rij der getallen $\int f_n$ begrensd is, dan $f \in \mathcal{L}[a,b]$ en

$$\int f \leq \liminf_n \int f_n.$$

(3) **Gedomineerde convergentie**: Zij (f_n) een rij in $\mathcal{L}[a,b]$ en $g \in \mathcal{L}[a,b]$, met $g \geq 0$, bijna overal. Als $|f_n| \leq g$, bijna overal, en $f = \lim_n f_n$, bijna overal, dan $f \in \mathcal{L}[a,b]$ en

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

We bewijzen nu nog een voor de hand liggende eigenschap van integreerbare functies, en kunnen dan met het eigenlijke werk beginnen.

13.4 Lemma. *Zij $f \in \mathcal{L}[a,b]$ en $f \geq 0$. Dan geldt*

$$\int f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \textit{ bijna overal.}$$

Bewijs. ($\Rightarrow$) Stel $\int f = 0$. Zij $A_n := \{x \in [a,b] : f(x) \leq \frac{1}{n}\}$ en $A = \{x \in [a,b] : f(x) = 0\}$. Dan hebben we

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

We zijn dus klaar als iedere $[a,b] \setminus A_n$ verwaarloosbaar is. Maar

$$\frac{m([a,b] \setminus A_n)}{n} = \int_{[a,b]\setminus A_n} \frac{1}{n} \leq \int_{[a,b]\setminus A_n} f \leq \int_{[a,b]} f = 0.$$

Dan kan alleen als $m([a,b] \setminus A_n) = 0$.

($\Leftarrow$) Duidelijk. ∎

13.5 Definitie. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie. Dan definiëren wij zijn **variatie** $\operatorname{Var} f$ door

$$\operatorname{Var} f := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \right\}.$$

We noemen f van **begrensde variatie** als $\operatorname{Var} f < \infty$. De verzameling der functies van begrensde variatie op $[a,b]$ noteren wij met $\mathcal{BV}[a,b]$.

13.6 Lemma. *Zij $f \in \mathcal{BV}[a,b]$ en laat $T(x) = \operatorname{Var}_{[a,x]} f$ $(x \in [a,b])$. Dan is T stijgend. (Zoals je verwacht is $\operatorname{Var}_{[a,x]} f := \operatorname{Var}(f \restriction [a,x])$.)*

Bewijs. Stel $p < q$ zijn punten in $[a,b]$. We bewijzen dat

$$T(q) - T(p) = \operatorname{Var}_{[p,q]} f, \quad \text{ofwel} \quad T(q) = T(p) + \operatorname{Var}_{[p,q]} f.$$

We bewijzen eerst dat $T(q) \leq T(p) + \mathrm{Var}_{[p,q]} f$. Hiervoor nemen we een willekeurige partitie van $[a,q]$ en bewijzen dat de som der verschillen door $T(p) + \mathrm{Var}_{[p,q]} f$ begrensd is. We merken dan het volgende op : Als we bij een gegeven partitie punten toevoegen wordt de som der verschillen niet groter. We kunnen dus z.b.d.a. aannemen dat p in zo'n partitie van $[a,q]$ voorkomt. Zij dus $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = q$ zo een partitie en neem aan dat $p = x_{i_0}$, waar $i_0 \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$. Dan geldt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{i_0} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=i_0+1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq T(p) + \mathrm{Var}_{[p,q]} f.\end{aligned}$$

Dat bewijst $T(q) \leq T(p) + \mathrm{Var}_{[p,q]} f$.

Nu andersom: Laat $\epsilon > 0$. Dan vinden we $a = x_0 < \cdots < x_N = p$ met

$$\sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > T(p) - \epsilon.$$

Net zo zijn er $p = x_N < x_{N+1} < \cdots < x_{N+K} = q$ met

$$\sum_{i=N+1}^{N+K} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \mathrm{Var}_{[p,q]} f - \epsilon.$$

Nu geldt

$$\begin{aligned}T(p) - \epsilon + \mathrm{Var}_{[p,q]} f - \epsilon &< \sum_{i=1}^{N} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=N+1}^{N+K} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{N+K} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq T(q).\end{aligned}$$

Dus

$$T(p) - \mathrm{Var}_{[p,q]} f \leq T(q) + 2\epsilon.$$

Neem nu de limiet $\epsilon \downarrow 0$. ■

13.7 Lemma. *Zij $f \in \mathcal{BV}[a,b]$. Dan is f het verschil van twee stijgende functies.*

Bewijs. Laat weer $T(x) := \mathrm{Var}_{[a,x]} f$ $(x \in [a,b])$. Met $f = T - (T - f)$ zijn we klaar als T en $T - f$ stijgend zijn. Dat T stijgend is volgt met lemma 13.6. Immers:

$$q < p \qquad \Rightarrow \qquad T(p) - T(q) = \mathrm{Var}_{[p,q]} f \geq 0.$$

We laten nu zien dat $T - f$ stijgend is. Bekijk $p < q$. Dan

$$f(q) - f(p) \leq |f(q) - f(p)| \leq \mathrm{Var}_{[p,q]} f = T(q) - T(p).$$

Dus

$$(T - f)(p) \leq (T - f)(q).$$

■

13.8 Gevolg. Zij $f \in \mathcal{BV}[a,b]$. Dan is f bijna overal differentieerbaar.

Bewijs. Volgens lemma 13.7 is f het verschil van twee stijgende functies, en dus met de stelling van Lebesgue bijna overal differentieerbaar. ■

13.9 Definitie. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie. Dan noemen we f **absoluut continu** als er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met

$$\left.\begin{array}{l} a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq b, \\ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \end{array}\right] \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

De collectie der absoluut continue functies op $[a,b]$ noteren wij met $\mathcal{AC}[a,b]$. Je kunt nagaan dat $\mathcal{AC}[a,b]$ een vectorruimte is. Verder zie je makkelijk dat $\mathcal{AC}[a,b] \subset C[a,b]$.

13.10 Lemma. *De volgende inclusie geldt:* $\mathcal{AC}[a,b] \subset \mathcal{BV}[a,b]$.

Bewijs. Stel $f \in \mathcal{AC}[a,b]$. Dan is er een $\delta > 0$ met

$$\left.\begin{array}{l} a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq b, \\ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \end{array}\right] \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < 1.$$

Zij $[p,q] \subset [a,b]$ een interval met $q - p < \delta$. Bekijk een partitie $p = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = q$ van $[p,q]$. Dan geldt $\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) < \delta$ en dus per aanname

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| < 1.$$

Omdat dit voor iedere partitie van $[p,q]$ waar is krijgen we $\mathrm{Var}_{[p,q]} f \leq 1$. Bekijk nu een partitie $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_K = b$ zodanig dat $y_i - y_{i-1} < \delta$. Dan vinden we met lemma 13.6 dat

$$\mathrm{Var}_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^K \mathrm{Var}_{[y_{i-1},y_i]} f \leq \sum_{i=1}^K 1 = K < \infty.$$

Dus $f \in \mathcal{BV}[a,b]$. ■

13.11 Gevolg. Zij $f \in \mathcal{AC}[a,b]$. Dan is f bijna overal differentieerbaar.

Bewijs. Voor $f \in \mathcal{AC}[a,b]$ geldt $f \in \mathcal{BV}[a,b]$, volgens lemma 13.10. Met gevolg 13.8 is f dus bijna overal differentieerbaar. ■

13.12 Lemma. *Stel $f \in \mathcal{AC}[a,b]$. Met gevolg 13.11 is f bijna overal differentieerbaar. Stel $f' = 0$ bijna overal. Dan is f constant.*

Bewijs. We bewijzen $f(a) = f(c)$ voor iedere $c \in (a,b]$. Zij $E := \{x \in [a,c] : f'(x) = 0\}$. Laat $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zodat

$$\left.\begin{array}{l} a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq b, \\ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \end{array}\right] \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Voor $x \in E$ is $f'(x) = 0$ dus zijn er willekeurig kleine intervallen $x \in (a_x, b_x)$ met

$$|f(b_x) - f(a_x)| < \epsilon(b_x - a_x).$$

Gelukkig kunnen we nu ook het Vitali-lemma gebruiken. Hiermee vinden we nu onderling disjuncte intervallen $[a_1, b_1], \cdots, [a_N, b_N]$ zodat

$$\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) > m(E) - \delta = m([a,c]) - \delta.$$

Na eventuele hernummering van de intervallen bekijk

$$a = b_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_N \leq a_{N+1} = c.$$

Deze keuze van letters levert dat (zie figuur 9)

$$\bigcup_{i=0}^N (b_i, a_{i+1}) = [a,c] \setminus \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i).$$

Figuur 9: Nummering als $N = 2$.

Dan geldt

$$\sum_{i=0}^N (a_{i+1} - b_i) = m\left([a,c] \setminus \bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i]\right) < \delta.$$

Per aanname geldt dus

$$\sum_{i=0}^N |f(a_{i+1}) - f(b_i)| < \epsilon.$$

Verder geldt

$$\sum_{i=1}^N |f(b_i) - f(a_i)| \leq \epsilon \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) \leq \epsilon(c - a).$$

Met de twee bovenstaande ongelijkheden krijgen we

$$|f(c) - f(a)| \leq \sum_{i=0}^{N} |f(a_{i+1}) - f(b_i)| + \sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon(c - a + 1).$$

Neem nu de limiet $\epsilon \downarrow 0$. Dan geldt $f(a) = f(c)$. ■

13.13. Merk op dat de Cantorfunctie ϕ bijna overal 0 als afgeleide heeft, maar $\phi(1) = 1$ en $\phi(0) = 0$. Dus kan ϕ zeker niet absoluut continu zijn. Omdat ϕ continu is vinden we in het bijzonder dat de inclusie $\mathcal{AC}[a,b] \subset C[a,b]$ strikt is, waarbij $C[a,b]$ de (uniform) continue functies op $[a,b]$ zijn.

13.14 Lemma. *Stel $f \in \mathcal{BV}[a,b]$. Dan is de bijna overal gedefinieerde functie f' integreerbaar.*

Bewijs. f en T zijn beide bijna overal differentieerbaar. Laat A de verzameling der punten zijn waar f en T differentieerbaar zijn. Dan is $[a,b] \setminus A$ verwaarloosbaar. Voor een punt $x \in A$ geldt verder

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| &= \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \\ &\leq \frac{\operatorname{Var}_{[x,x+h]} f}{|h|} = \frac{T(x+h) - T(x)}{|h|}. \end{aligned}$$

Neem nu de limiet $h \to 0$. Dan $|f'(x)| \leq T'(x)$. Omdat T een stijgende functie is geldt nu

$$\int_a^b |f'| \leq \int_a^b T' \leq T(b) - T(a) = \operatorname{Var}_{[a,b]} f < \infty.$$

Dus is f' Lebesgue-integreerbaar. Merk op dat we hier gebruiken dat voor een stijgende functie $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ geldt

$$\int_a^b h' \leq h(b) - h(a).$$

Het bewijs hiervan is in lemma 11.3 te vinden. ■

13.15 Stelling. *Zij $(f_n)_n$ een rij van stijgende functies op $[a,b]$ en stel dat $f(x) := \sum_n f_n(x)$ eindig is, voor elke $x \in [a,b]$. Dan geldt*

$$f' = \sum_n f_n',$$

bijna overal.

Bewijs. **(I)** We volgen het idee in [5, p. 33], zodat we geen diepere eigenschappen van de Lebesgue-integraal nodig hebben. We kunnen zonder beperking der algemeenheid aannemen dat $f_n(a) = 0$, zodat $f_n \geq 0$. (Door de functie $g_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$ te bekijken, zien we dat $g_n(x) + f_n(a) = f(x)$. Pas dan de stelling op de g_n-en toe.) Laat

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} f_n \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

Laat E de verzameling der punten in $[a, b]$ zijn, zodat s en iedere s_N differentieerbaar zijn. Dan is $E \setminus [a, b]$ verwaarloosbaar, omdat deze verzameling een aftelbare vereniging van verwaarloosbare verzamelingen is. Nu zijn $s_{N+1} - s_N$ en $s - s_N$ stijgende functies. Op E geldt dan

$$(s_{N+1} - s_N)' \geq 0 \quad \text{en} \quad (s - s_N)' \geq 0, \quad \text{bijna overal}$$

dus bijna overal geldt

$$s_1'(x) \leq s_2'(x) \leq \cdots \leq s'(x) \qquad (x \in E).$$

Omdat $(s_N'(x))_N$ een stijgende rij, begrensd door $s'(x)$, is, hebben we bijna overal

$$\lim_{n \to \infty} s_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad (x \in E).$$

Dan geldt natuurlijk ook bijna overal $f_n'(x) \to 0$ als $n \to \infty$, voor $x \in E$.

(II) In **(I)** hebben we nu het volgende bewezen: Als (f_n) zoals in de stelling is, dan $f_n'(x) \to 0$, bijna overal.

(III) We bewijzen nu dat $\lim_N s_N' = s'$ bijna overal. Omdat $\lim_N s_N'$ bestaat, hoeven we alleen een deelrij te vinden die bijna overal naar s' convergeert.

Zoek getallen $n_1, n_2, \cdots$ zodanig dat

$$s(b) - s_{n_k}(b) \leq 2^{-k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Laat $t_k := s - s_{n_k}$ voor $k \in \mathbb{N}$. Dan is iedere t_k stijgend, en voor $x \in [a, b]$ geldt

$$\sum_{k=1}^{K} t_k(x) = \sum_{k=1}^{K} s(x) - s_{n_k}(x) \leq \sum_{k=1}^{K} s(b) - s_{n_k}(b) \leq \sum_{k=1}^{K} 2^{-k} \leq 1.$$

Dus $\sum_k t_k(x)$ bestaat voor iedere $x \in [a, b]$. Met **(II)** geldt dus $t_k'(x) \to 0$, bijna overal. Dus

$$s_{n_k}'(x) \to s'(x) \quad \text{voor bijna elke } x.$$

We zijn dus klaar.

■

13.16 Definitie. Zij I een interval en $f \in \mathcal{L}(I)$. Dan heet $F : I \to \mathbb{R}$ een **onbepaalde integraal** van f als

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in I, \\ x < y \end{array}\right] \Rightarrow F(y) - F(x) = \int_x^y f.$$

13.17 Stelling. *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een Lebesgue-integreerbare functie, en zij F een onbepaalde integraal van f. Dan geldt $F' = f$, bijna overal.*

Bewijs. We weten dat $f \in \mathcal{L}[a,b]$. Dus geldt volgens 13.3 dat er een rij (ϕ_n) in $C[a,b]$ bestaat met

$$\sum \int |\phi_n| < \infty \qquad \text{en} \qquad \sum \phi_n = f \quad \text{,bijna overal.}$$

Definieer

$$\phi_n^+ := \phi_n \vee 0 \qquad \text{en} \qquad \phi_n^- := -(\phi_n \wedge 0).$$

Dan geldt $\phi_n = \phi_n^+ - \phi_n^-$. Verder geldt voor iedere $N \in \mathbb{N}$ dat

$$\sum_{n=1}^N \int_a^x \phi_n^+ \leq \sum_{n=1}^N \int_a^x |\phi_n| \leq \sum \int |\phi_n| < \infty.$$

Net zo geldt dit voor ϕ_n^- in plaats van ϕ_n^+. We kunnen dus de volgende functies definiëren :

$$U(x) := \sum \int_a^x \phi_n^+, \qquad V(x) := \sum \int_a^x \phi_n^- \qquad (x \in [a,b]).$$

Met stelling 13.15 zien we dat $U' = \sum \phi_n^+$ bijna overal en $V' = \sum \phi_n^-$, bijna overal. Dus

$$(U - V)' = \sum \phi_n \quad \text{, bijna overal.}$$

We zijn klaar als $U - V$ op een constante na gelijk is aan F. We merken eerst het volgende op : Met de monotone convergentie (Levi) zien we dat

$$\sum \int_a^x \phi_n^+ = \int_a^x \sum \phi_n^+.$$

Net zo voor de ϕ_n^--en. Voor iedere $x \in [a,b]$ krijgen we dan

$$\begin{aligned}(U - V)(x) &= \sum \int_a^x \phi_n^+ - \sum \int_a^x \phi_n^- = \int_a^x \sum \phi_n^+ - \int_a^x \sum \phi_n^- \\ &= \int_a^x \sum \phi_n = \int_a^x f = F(x) - F(a).\end{aligned}$$

We zijn dus klaar. ■

13.18 Lemma. *Zij $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ een onbepaalde integraal van $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dan geldt $F \in \mathcal{AC}[a,b]$.*

Bewijs. Laat $\epsilon > 0$. Uit de definitie volgt dat er een continue $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $\int_a^b |f - \phi| < \frac{\epsilon}{2}$. Zij $M := \max_{x \in [a,b]} |\phi(x)|$ en laat $\delta > 0$ zodanig dat $2M\delta < \epsilon$. Bekijk $a = a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_n \leq b$ met $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$. Laat $U := \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Dan geldt $m(U) < \delta$ en

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} f \right| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f| = \int_U |f| \\ &\leq \int_U |\phi| + \int_U |f - \phi| \leq \int_U M + \int_a^b |f - \phi| \\ &< m(U) \cdot M + \frac{\epsilon}{2} < \delta M + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.\end{aligned}$$

■

13.19 Stelling. *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie. Dan is f absoluut continu dan en slechts dan als f een onbepaalde integraal van een Lebesgue-integreerbare functie is.*

In dat geval is f bijna overal differentieerbaar , f' is Lebesgue-integreerbaar en f is een onbepaalde integraal van f'.

Bewijs. ($\Rightarrow$) Stel eerst dat $f \in \mathcal{AC}[a,b]$. Dan is f bijna overal differentieerbaar. We bewijzen dat f een onbepaalde integraal van f' is. Volgens lemma 13.14 is f' Lebesgue-integreerbaar. Laat dan

$$g(x) := f(a) + \int_a^x f' \qquad (x \in [a,b]).$$

Nu is g een onbepaalde integraal van f'. Met lemma 13.18 geldt $g \in \mathcal{AC}[a,b]$. Dus ook $f - g \in \mathcal{AC}[a,b]$. Met lemma 13.17 geldt $g' = f'$ bijna overal, dus $(g - f)' = 0$ bijna overal. Met lemma 13.12 zien we dat $g - f$ constant is, zeg $g - f = C$, voor zekere $C \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$f(y) - f(x) = g(y) - g(x) = \int_a^y f' - \int_a^x f' = \int_x^y f',$$

dus is f het onbepaalde integraal van f'.

($\Leftarrow$) Stel f is een onbepaalde integraal. Dan zegt lemma 13.18 dat $f \in \mathcal{AC}[a,b]$. In ($\Rightarrow$) hebben we bewezen, dat f dan een onbepaalde integraal van f' is. ■

14 Appendix

14.1. We zullen hier een aantal lemma's en definities geven, die op sommige plekken in de tekst verhelderend kunnen zijn. Meer informatie over elementaire analyse en Lebesgue-integratie bevindt zich bijvoorbeeld in [3].

14.2 Definitie. • Een verzameling $A \subset \mathbb{R}$ heet **open** als we voor elke $x \in A$ een $\epsilon > 0$ kunnen vinden met $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A$. Als $X \subset \mathbb{R}$ dan geven we X de restrictietopologie van $\mathbb{R}$. De open verzamelingen in X zijn dus van de vorm $U \cap X$ waar U open in $\mathbb{R}$ is. De **gesloten** verzamelingen zijn per definitie de complementen van de open verzamelingen.

- Een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ heet **samenhangend** als we A niet als disjuncte vereniging van twee niet-lege en in A open verzamelingen kunnen schrijven. Dat is equivalent aan de eigenschap dat de enige „clopen" (gesloten en open) verzamelingen in A de lege verzameling en A zelf zijn.

- Als $K \subset \mathbb{R}$, dan heet K **compact** als K de volgende eigenschap heeft: Elke open overdekking $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ van K heeft een eindige deeloverdekking. Dus
$$K \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_N \in I : K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{\alpha_i}.$$

14.3. Het volgende lemma lijkt triviaal, maar het bewijs is niet helemaal vanzelf. Omdat het lemma praktische toepassingen heeft en een beschrijving van intervallen geeft zullen we toch naar het bewijs kijken.

14.4 Lemma. *Een verzameling $A \subset \mathbb{R}$ is samenhangend dan en slechts dan als A de volgende eigenschap heeft:*
$$\left.\begin{array}{l} x, y \in A, \\ x < y \end{array}\right] \Rightarrow [x, y] \subset A.$$
(Deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ met deze eigenschap heten ook „convex".)

Bewijs. ($\Rightarrow$) Neem aan dat A niet convex is. Er zijn dan $x, y \in A$ en $c \in \mathbb{R}$ met $x < c < y$ zodanig dat $c \notin A$. Maken we $U := (-\infty, c) \cap A$ en $V := (c, \infty) \cap A$ dan geldt $A = U \cup V$ waarbij U en V niet-lege, open en disjuncte verzamelingen zijn. Tegenspraak.
($\Leftarrow$) Stel A is convex maar niet samenhangend. Schrijf dan $A = U \cup V$ waar U, V niet-leeg, disjunct en open in A zijn.
Bekijk $x \in U$ en $y \in V$. We kunnen aannemen dat $x < y$. Omdat $[x, y] \cap U \neq \emptyset$

Figuur 10: De situatie als A niet samenhangend is.

kunnen we het volgende reële getal definiëren
$$z := \sup([x, y] \cap U).$$

Duidelijk geldt $z \in [x, y]$. Dus, omdat $[x, y] \subset A$, hebben we $z \in A = U \cup V$. Neem aan dat $z \in U$. Dan $z < y$. U is open in A, schrijf dan $U = U' \cap A$ met U' open in $\mathbb{R}$. Met z in U is er dus een $\epsilon > 0$ zodanig dat

$$(z - \epsilon, z + \epsilon) \cap A \subset U' \cap A = U.$$

Laat $t \in (z, z + \epsilon)$. Dan geldt $x \leq z < t < y$ dus $t \in [x, y]$ en $t \in U$. Dus $t \in [x, y] \cap U$ terwijl $z < t$. Dat is een tegenspraak met de definitie van z.

Als $z \in V$ dan schrijf $V = V' \cap A$ met V' open. Er is weer een $\epsilon > 0$ met $(z - \epsilon, z + \epsilon) \cap A \subset V$. Met de definitie van z kunnen we een $t \in [x, y] \cap U$ vinden met $z - \epsilon < t \leq z$. Dan geldt $t \in U$ en $t \in V$ zodat $U \cap V \neq \emptyset$. Tegenspraak. ■

14.5. Een heel belangrijk resultaat in de reële analyse is dat het eenheidsinterval $[0, 1]$ compact is. Dit wordt ook de stelling van Heine en Borel genoemd. We hadden lemma 14.6 ook in sectie 8 als bewijsmethode kunnen geven.

14.6 Lemma. *Voor een deelverzameling K van $\mathbb{R}$ zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(α) *K is compact.*

(β) *Elke rij (x_n) in K heeft een convergente deelrij met limiet in K.*

(γ) *K is gesloten en begrensd.*

Bewijs. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Stel K is compact en zij (x_n) een rij in K. We bewijzen eerst dat de rij (x_n) begrensd is. Dat is waar als K begrensd is. Maar

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k].$$

Met de compactheid volgt dus dat er een $k > 0$ bestaat met $K \subset [-k, k]$. In het bijzonder is $L := \limsup_{n \to \infty} x_n$ een reëel getal. Je kunt makkelijk nagaan dat er een deelrij (x_{n_k}) van (x_n) is zodat $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = L$.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ Zij (x_n) een rij in K met limiet $x \in \mathbb{R}$. Nu is er een convergente deelrij (x_{n_k}) van (x_n) met limiet in K. Dat limiet moet duidelijk gelijk aan x zijn. Maar dan geldt $x \in K$. Dus K is gesloten. Als K niet begrensd is, kunnen we een rij (x_n) in K maken zodat $|x_n - x_m| \geq 1$ voor alle n, m met $n \neq m$. Deze kan zeker geen convergente deelrij hebben. K moet dus begrensd zijn.

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$ We zijn klaar als $[0, 1]$ compact is. Immers: K is begrensd, dus er is een $k > 0$ met $K \subset [-k, k]$. Als $[0, 1]$ compact is, dan is ook $[-k, k]$ compact. Uit de topologie weten we dat de doorsnede van een compacte en een gesloten verzameling in een Hausdorffruimte weer compact is. Dus: $[-k, k] \cap K = K$ is compact.

We bewijzen dus dat $[0,1]$ compact is. Zij hiervoor $\mathcal{U}$ een overdekking van $[0,1]$ door open verzamelingen. Definieer dan

$$S := \{t \in [0,1] : [0,t] \text{ wordt door eindg veel } U \in \mathcal{U} \text{ overdekt.}\}.$$

Duidelijk geldt $0 \in S$ en $S \subset [0,1]$. Dus we kunnen $t := \sup(S)$ definiëren. We laten nu zien dat $t \in S$. Als $t = 0$ zijn we klaar. Anders zoek een $U \in \mathcal{U}$ met $t \in U$. Dat kan omdat $t \in [0,1]$. Omdat U open is vinden we een $\epsilon > 0$ met $(t-\epsilon, t+\epsilon) \subset U$. We kunnen verder aannemen dat $t-\epsilon > 0$, want $t > 0$. Nu zijn er $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ zodat $[0, t-\epsilon/2] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Duidelijk is $\{U_1, \cdots, U_n, U\}$ een open overdekking van $[0,t]$ door eindig veel open verzamelingen in $\mathcal{U}$. Dus $t \in S$.

Stel nu dat $t < 1$. Omdat $t \in S$ vinden we $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ met $[0,t] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Maar deze open verzamelingen overdekken ook $[0, t+\epsilon]$ voor zekere $\epsilon > 0$ met $t+\epsilon < 1$. Dat staat in strijd met de definitie van t. Dus $t = 1$. Blijkbaar kunnen we $[0,1]$ door een eindige deelcollectie van $\mathcal{U}$ overdekken. ■

14.7 Stelling. *Laat $U \subset \mathbb{R}$ open zijn. Dan kunnen we U als disjuncte vereniging van open intervallen schrijven:*

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

*Merk op dat de eindpunten van de intervallen (a_n, b_n) niet eindig hoeven te zijn. Een interval (a_n, b_n) noemen we een **component** van U.*

Bewijs. Stel $x \in U$. Maak

$$L_x := \{y < x : (y,x) \subset U\} \qquad \text{en} \qquad R_x := \{y > x : (x,y) \subset U\}.$$

Laat $a_x := \inf L_x,\ b_x := \sup R_x$ en $I_x := (a_x, b_x)$. Dan $a_x < x < b_x$ en $I_x \subset U$. Stel er zijn $x, y \in U$ met $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. Dan is $I_x \cup I_y$ een open interval, bevat in U. Met $x \in I_x$ en $y \in I_y$ geldt $I_x \cup I_y \subset I_x \cap I_y$. Dat gebeurt alleen als $I_x = I_y$. Nu geldt

$$U = \bigcup_{q \in U \cap \mathbb{Q}} I_q.$$

Omdat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is zijn we nu klaar. ■

14.8. Omdat we in hoofdstuk 4 vaker met geometrische reeksen hanteren, herhaal ik hier nog enkele eigenschappen van zulke reeksen. We merken verder nog op dat als $|\alpha| < 1$, dan $\alpha^n \to 0$ als $n \to \infty$. Dat zie je als volgt in: Je gaat makkelijk na dat de functie $x \mapsto x^n$, afhankelijk van n, dalend is voor $x \in (0,1)$.

Deze functie is door 0 van beneden begrensd. Dus moet $\lim_n \alpha^n$ bestaan en is gelijk aan $\inf_n \alpha^n$. Zij L de limiet van α^n als $n \to \infty$. Dan geldt

$$L(\alpha - 1) = \lim_n (\alpha^{n+1} - \alpha^n) = L - L = 0.$$

Dat kan alleen als $L = 0$.

14.9 Lemma. *Stel $|\alpha| < 1$. Dan bestaat $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ en is gelijk aan $\frac{1}{1-\alpha}$.*

Bewijs. Met $S_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha^n$ geldt voor elke N dat

$$S_N(1-\alpha) = S_N - \alpha S_N = 1 - \alpha^{N+1}.$$

Met $|\alpha| < 1$ zien we

$$S_N = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \to \frac{1}{1-\alpha} \text{ als } N \to \infty.$$

■

14.10 Gevolg. In het bijzonder zien we met het bewijs dat

$$\begin{aligned}\sum_{n>N} \alpha^n &= \frac{1}{1-\alpha} - S_N \\ &= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} = \frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

14.11 Voorbeeld. Met lemma 14.9 kunnen we nu gemakkelijk de volgende berekeningen uitvoeren:

- $\sum_1^{\infty} (1/2)^n = \frac{1}{1-(1/2)} - 1 = 2 - 1 = 1.$
- $\sum_{n>N} (1/2)^n = (1/2)^{N+1} \cdot 2 = (1/2)^N = 2^{-N}.$
- $\sum_{n>N} (1/3)^n = (1/3)^{N+1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^{-N}}{2}.$

14.12 Lemma. *Er zijn Lebesguemeetbare verzamelingen die niet Borelmeetbaar zijn.*

Het bewijs is niet constructief, maar wel eenvoudig. Er zijn ook expliciete voorbeelden. Een hiervan heeft Lusin in 1927 bedacht en gebruikt kettingbreuken.

Bewijs. We breiden de Cantorfunctie ϕ tot $\hat{\phi}$ op $\mathbb{R}$ uit door $\hat{\phi}(x) = 0$ als $x < 0$ en $\hat{\phi}(x) = 1$ als $x > 1$. Laat $f(x) := \hat{\phi}(x) + x \quad (x \in \mathbb{R})$. Dan is f continu en strikt stijgend. Je kan makkelijk nagaan dat iedere continue en strikt stijgende functie Borelmeetbare verzamelingen in Borelmeetbare verzamelingen overvoert. Omdat de Cantorverzameling $\mathbb{D}$ gesloten is moet $f(\mathbb{D})$ dus Borelmeetbaar zijn.

Schrijf even $[0,1] \setminus \mathbb{D} = \bigcup (a_n, b_n)$ waar de intervallen (a_n, b_n) de componenten zijn. Dan geldt

$$\begin{aligned} m(f([0,1] \setminus \mathbb{D})) &= m\left(\bigcup f((a_n, b_n))\right) = \sum m(f((a_n, b_n))) \\ &= \sum m((a_n + \phi(a_n), b_n + \phi(b_n)) = \sum m((a_n, b_n)) = 1. \end{aligned}$$

Op de componenten is ϕ namelijk constant. Omdat $m(f([0,1])) = 2$ geldt

$$2 = m(f([0,1])) = m(f([0,1] \setminus \mathbb{D})) + m(f(\mathbb{D})) = 1 + m(f(\mathbb{D}))$$

Dus geldt $m(f(\mathbb{D})) = 1$. We weten dat iedere Lebesguemeetbare verzameling met positieve maat een niet Lebesguemeetbare verzameling bevat (zie [5, p. 145]). Laat $A \subset f(\mathbb{D})$ zo een niet Lebesguemeetbare verzameling zijn. Dan geldt $f^{-1}(A) \subset \mathbb{D}$ dus $f^{-1}(A)$ is verwaarloosbaar en dus ook Lebesguemeetbaar. Maar $A = f(f^{-1}(A))$. Als nu $f^{-1}(A)$ Borelmeetbaar was, dan ook het beeld onder f, wat gelijk is aan A. Maar A is niet Borelmeetbaar. Conclusie: $f^{-1}(A)$ is Lebesguemeetbaar maar niet Borelmeetbaar. ■

Referenties

[1] L.A. Rubel, Differentiability of monotonic functions, *Colloq. Math.* **10** (1963) p. 277-279.

[2] R. P. Boas, Jr., Differentiability of jump functions, *Colloq. Math.* **8** (1961) p. 81-82.

[3] Stein, E. M., and Shakarchi, R. (2005). Real analysis: Measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton, N.J: Princeton University Press, p.121-134.

[4] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Functional Analysis, Fredrick Ungar, New York, 1955 p. 6-9.

[5] A.C.M. van Rooij, W.H. Schikhof, A second Course on Real Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[6] S. Saks, Theory of the integral, Dover, Warszawa-Lwów 1937.

[7] C.-A. Faure, The Lebesgue Differentiation Theorem via the Rising Sun Lemma, Real Anal. Exch., **29(2)** (2003/2004) p. 947-951.

[8] J. Hagood, The Lebesgue Differentiation Theorem via Nonoverlapping Interval Covers, Real Anal. Exch., **29(2)** (2003/2004) p. 953-956.

[9] H.L. Royden, Real Analysis, 3rd ed., Macmillan, New York, 1988.

[10] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier Villars, Paris, 1904.

[11] J. Von Neumann , Functional Operators, Vol. 2 . Princeton University Press, 1950.